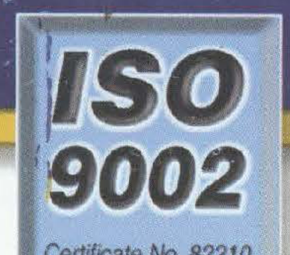
مبـــادئ الاحتمالات

الجزء الأول



دكتور
رأفت رياض رزق الله







مبادئ الاحتمالات

الجزء الأول

د. رأفت رياض رزق الله
أستاذ مساعد
لية التربية - جامعة عين شمس



الناشر
المكتبة الأكاديمية
شركة مساهمة مصرية



٢٠٠٣



حقوق النشر

الطبعة الأولى ٢٠٠٢م - ١٤٢٣هـ

المكتبة الأكاديمية

شركة مساهمة مصرية

رأس المال المصدر والمدفوع ٩,٩٧٣,٨٠٠ جنيه مصرى

١٢١ شارع التحرير - الدقى - الجيزة

القاهرة - جمهورية مصر العربية

تليفون : ٧٤٨٥٢٨٢ - ٣٣٦٨٢٨٨ (٢٠٢)

فاكس : ٧٤٩١٨٩٠ (٢٠٢)

إهــداء

إلى أستاذي القدير ...

مقدمة

نظرية الاحتمال ترجع بداياتها ألى أوائل القرن السابع عشر كنتيجة لدراسة بعض العاب الحظ المختلفة ولكن لم يوضع لها مسلمات ألا في العشرينات والثلاثينات من القرن العشرين ، وتعتبر نظرية الاحتمال الآن من الفروع الهامة في علم الرياضيات ، ولقد اتسع نطاق تطبيقها ليشمل العديد من العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية والسياسية بل ويمكننا القول أن الاحتمالات موجودة معنا كل يوم ، فمثلا توقعات الطقس في نشرات الأحوال الجوية في الأخبار التى على مسامعنا يوميا تعتمد أساساً على الاحتمالات ، واستطلاع رأى الجمهور في شأن ما يعتمد أساساً على الاحتمالات ، وشركات التأمين تعتمد أساساً على الاحتمالات في دراسة العمر المتوقع أو المخاطر المحتمل حدوثها للأشياء التي يتم التامين عليها بل واكثر من ذلك فإن كل منا يطلق لخياله العنان في تقدير احتمال نجاحه أو فشله في أمر ما من أمور الحياة سواء المتعلقة بالدراسة أو العمل أو ما شابه ذلك .

وفى بعض الأحيان يصدر عن العديد من الأشخاص بمستوياتهم الثقافية والعلمية المختلفة عبارات وتساؤلات تحمل في معناها مفهوم الاحتمال ، فمثلا أن يقول أحدهم " هناك احتمال بنسبة 80% أن يتحسن الطقس غدا " أو يقول آخر " هناك احتمال قوى للحصول على تقدير ممتاز في الامتحان " أو يقول ثالث " احتمال النجاح في المشروع اكبر من احتمال الفشل " أو يقول رابع " يوجد احتمال ضعيف للإصابة بالمرض " وهكذا . أذن يمكننا القول بكل ثقة أن الاحتمالات موجودة وتعيش معنا كل يوم ، لذلك نجد أنه من الواجب بل ومن الضروري أن نتعرف بالتفصيل على ما تحمله كلمة الاحتمال من معنى ومفهوم خاصة وأنها أصبحت علم من العلوم الهامة .

والهدف الأساسي من هذا الكتاب " مبادئ الاحتمالات " في جزئه الأول هو تقديم الاحتمالات بطريقة ملائمة واكثر فاعلية وذلك من خلال عدد كبير من الأمثلة التوضيحية والتمارين الجذابة والشيقة والتي تجعل دراسة التعاريف والنظريات والمفاهيم المختلفة في

الاحتمالات دراسة ممتعة ولتحقيق ذلك فقد تم وضع وتصميم واختيار الأمثلة والتمارين بالكتاب بعناية شديدة لضمان وصول جميع المفاهيم بصورة واضحة ومتدرجة إلى القارئ دون أي لبس أو غموض مما يثير حب الاستطلاع لديه وبالتالي يدفعه ذلك إلى البحث والتنقيب في نظرية الاحتمالات بحماس وقوة شديدين دون ملل .

ومما لا شك فيه أنه عند تأليف كتاباً في موضوع ما خاصة في الرياضيات فإن المؤلف يجد نفسه يصارع أمام قوتين متضادتين وكل منهما تحاول استمالته ، وبالنسبة للقوة الأولى فهي النزعة الطبيعية لدى المؤلف لوضع الكثير والكثير من المعلومات في الكتاب انطلاقا من مبدأ أن كل شئ متعلق بموضوع الكتاب يكون مهم ومن الضروري التعرض له في الكتاب ، وأما عن القوة الثانية التي تحاول استمالته فهي أن المؤلف يضع في اعتباره تصور واضح عن الهدف من الكتاب ومستوى المعرفة المطلوب تقديمه ويركز عليه وعلى جمهور الدارسين والقراء الذين سيوجه إليهم كتابه وهذا ما يدفعه إلى التعامل بعناية مع ما يذكر بالكتاب وما يستبعد منه خاصة وأن المعلومات متدرجة ، وبكل تواضع أستطيع القول أنه في هذا الكتاب والذي وضع له اسم " مبادئ الاحتمالات " تم حل هذا الصراع المشار أليه والناتج من هاتين القوتين المتضادتين وهذا ما سوف يلاحظه القارئ والمعلم ، فالكتاب متعدد الجوانب ويمكن للقارئ (أو المعلم) اختيار الأمثلة والتمارين التي يفضلها من مجموعة كبيرة من الأمثلة والتمارين وإذا كان من الضروري فيمكنه حذف بعض البنود الفرعية أو النظريات لقراءتها (أو تدريسها) في مستويات مناسبة ولذلك يمكن القول أن الكتاب هو بمثابة دعوة للقراء بمستوياتهم المعرفية المختلفة للتعرف على الاحتمالات .

و هذا الكتاب الذي بين يديك الآن يحمل اسم " مبادئ الاحتمالات " في جزئه الأول ، وقد تم تخطيطه بحيث يقدم الاحتمالات بصورة مبسطة لكن شاملة ومدعمة بالأمثلة المختلفة من حياتنا اليومية بالإضافة إلى أمثلة عديدة تتعلق بالمفاهيم الرياضية المختلفة . وقد قسمت المادة العلمية لهذا الكتاب في جزئه الأول إلى أربعة فصول كتبت بطريقة متسلسلة تبرز الترابط بين كل فصل والفصل الذي يليه ، وكل فصل يبدأ بسرد واضح ومفصل للتعاريف والنظريات والمفاهيم الأساسية مع أمثلة توضيحية متعددة وشاملة لكافة المفاهيم المختلفة لتدعيمها وفى نهاية كل فصل وضعت تمارين تعتبر بمثابة مراجعة شاملة للمادة العلمية بالفصل وقد ذيلنا هذا الكتاب بملحق لتقديم مراجعة سريعة للمفاهيم الأساسية في المجموعات .

ولأن الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية لذلك كان من الضروري أن نخصص الفصل الأول من هذا الكتاب لدراسة التجارب العشوائية وهذا هو عنوان الفصل الأول فهو بعنوان " التجارب العشوائية Random Experiments " وفيه نتعرف على فضاء العينة بأنواعه المختلفة ونتعرف على الأحداث وكيفية تكوين الشجرة البيانية لحصر عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية كما نتعرف على علاقة الأحداث بنظرية المجموعات . وعند البدء في دراسة الاحتمالات فإن البعض قد يكون لديهم ميل في الاعتقاد بأن فراغ العينة لأي تجربة عشوائية يكون دائما فضاء منتهى ، أي به عدد محدود من العناصر ، ولمعالجة ذلك تم وضع أمثلة توضيحية لتجارب عشوائية ذات فضاء عينة لا نهائي سواء قابل للعد أو غير قابل للعد ، فمثلا تم وضع أمثلة لاختيار نقط بطريقة عشوائية من داخل فترة على خط الأعداد أو من مساحة لشكل هندسي في المستوى أو من حجم مجسم في الفراغ .

وفى الفصل الثاني ووفقا للتدرج الطبيعي فقد كان من الملائم أن يتعرف القارئ على طرق العد المختلفة وذلك لان الحاجة إلى التعرف على طرق العد تظهر ملحة كمتطلب أساسي للقارئ ليتمكن من ربط المفاهيم التي تعلمها في الفصل الأول وللتعرف على كيفية حساب عدد عناصر فضاء العينة في التجارب الأكثر تعقيدا ، ولذلك كان عنوان الفصل الثاني هو " طرق العد Counting Methods " حيث تعرفنا على قاعدة الضرب و المبدأ الأساسي للعد وقاعدة الجمع والتباديل والتوافيق والتباديل مع التكرار كما عرضنا الطرق المختلفة لسحب العينات .

والفصل الثالث بعنوان " دالة الاحتمال Probability Function "ونتعرف فيه على تعريف الاحتمال حيث تعرضنا للتعريف الكلاسيكي والتعريف التجريبي للاحتمال ووضحنا كيف أن كل من هذين التعريفين لا يفي بموضوع دراسة الاحتمالات وكذلك وضحنا التعريف الرياضي للاحتمالات المبنى على طريقة المسلمات حيث وضحنا المقصود بطريقة المسلمات وتم تقديم مسلمات نظرية الاحتمال والنظريات الأساسية الناتجة من هذه المسلمات مع البرهان وكذلك تم تقديم فضاء الاحتمال بأنواعه سواء المنتهى والمنتهى المنتظم و اللانهائي القابل للعد أو اللانهائي الغير قابل للعد ، ودراسة اتصال دالة الاحتمال وكذلك دراسة الأحداث ذات الاحتمالات 0 , 1 حيث نتعرف على تجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 0 وتجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من

الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 1 وهذا من شأنه إزالة أي التباس أو سؤ فـــهم عند دراسة الأحداث ذات الاحتمالات 1 , 0 وقدمنا خير توضيح لذلك وهو تجربة اختيـــار نقطة عشوائيا من داخل فترة .

والفصل الرابع بعنوان " الاحتمال المشروط والاستقلال " ونتعرف فيه على تعريـــف الاحتمال المشروط وكيفية حسابه وتحديد فضاء العينة المختزل واستخدامه بدلاً من فضاء العينة الأصلي للتجربة للوصول بطريقة مختصرة إلى الحل المطلوب وكذلك وضحنا نظريـــة حـــاصل الضرب للاحتمال المشروط ومفهوم الاحتمال الكلى وكذلك نظرية بييز وتطبيقاتهـــا وكيفيـــة تمثيل شجرة الاحتمال واستخدامها في تمثيل التجارب العشوائية المتعددة المراحل ، نتعرف أيضا في هذا الفصل على الأحداث المستقلة والتجارب المستقلة وفى كل هذا كانت الأمثلة العديـــدة أسلوبا ونهجا لتوضيح كافة المفاهيم في كافة البنود من كل فصل من الفصول الأربعة .

وأود أن انتهز هذه الفرصـــة لأتوجه بالشـــكر العميق إلى كل أساتذتي الذين تعلمـــت على أياديـــهم في مراحل تعليمي المختلفة .

وأتمنى أن يكون في هذا الكتاب النفع لجميع الدارسين ... والله من وراء القصد . . وهو يهدى السبيل .

المـــؤلـــف

دكتور / رأفت رياض رزق الله

أســـتاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربيـــة – جامعة عين شمس

المحتويات

الفصل 1

التجارب العشوائية
Random Experiments

١ - فضاء العينة والأحداث Sample Space and Events

الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية ، وللتعرف على التجارب العشوائية بما تحويـــه من مفاهيم أساسية كفضاء العينة والأحداث فإننا نبدأ بتعريف التجربة العشوائية .

تعريف ١ : التجربة العشـــوائية Random Experiment

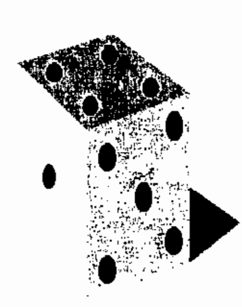
التجربة العشوائية هي تجربة نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة لها ولكننـــا لا نعـــرف بشكل حتمي أي من هذه النواتج سوف يقع أو سيتحقق أو سنحصل عليه بالضبط .

أي أن ناتج التجربة لا يكون معروف بشكل حتمي لذلك سميت تجربة عشوائية .

مثـــال ١ :



– تجربة إلقاء عملة معدنية هي تجربة عشوائية حيـــث لا نعـــرف أي النواتج سنحصل عليها هل صورة (Head) ويرمز لها بالرمز H أو كتابة (Tail) ويرمز لها بـــالرمز T أي أن نتيجـــة التجربة لا يكون معروف بشكل حتمي وأن كنا نعلم مسبقاً أننـــا سنحصل على أياً من النواتج صورة H أو كتابة T .



– تجربة إلقاء حجر نرد لملاحظة العدد الذي يظهر علـــى الوجـــه العلوي هي تجربة عشوائية حيث لا نعرف أي النواتج نحصـــل عليها فهناك ستة أرقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 يمكن لأياً منها أن يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد أي أن ناتج التجربـة لا يكون معروف بشكل حتمي وأن كنا نعلـــم مســـبقاً أننـــا سنحصل على أياً من الأرقام الستة 1, 2, 3, 4 , 5 , 6 .

وفى التجربة الأولى كانت النواتج التي يمكن الحصول عليها هي صورة H أو كتابة T وفى التجربة الثانية كانت النواتج التي يمكن الحصول عليها هي 1,2,3,4,5,6 ومجموعة النواتج التي يمكن الحصول عليها في أي تجربة عشوائية يطلق عليها اسم فضاء العينة أو فراغ العينة .

تعريف ٢ : فضاء العينة (فراغ العينة) Sample Space

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز S وعدد عناصر فضاء العينة S يرمز له $n(S)$.

مثال ٢ :

في هذا المثال نوضح فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون $S = \{H,T\}$
ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 2$.

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين فإن فضاء العينة يكون $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 4$.

– في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 8$.

– في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 6$.

– في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6 \}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 12$.

– في تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " فإن فضاء العينة يتكون من 52 عنصر وذلك لان عدد أوراق الكوتشينة يساوى 52 ورقة .

وفضاء العينة ينقسم إلى ثلاثة أنواع حسب عدد عناصره

النوع الأول : فضاء عينة منتهى Finite Sample Space
وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد منتهى من العناصر .

النوع الثاني : فضاء عينة لانهائي قابل للعد Countable Infinite Sample Space
وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد لا نهائى من العناصر لكنه قابل للعد .

النوع الثالث: فضاء عينة لانهائي وغير قابل للعد Uncountable Infinite S . Space
وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد لا نهائى من العناصر ولكنه غير قابل للعد .

تعريف ٣ : الأحداث الأولية (البسيطة) Elementary Events
كل ناتج أو عنصر من فضاء العينة S لأي تجربة عشوائية يسمى حدث أولي أو حدث بسيط .

مثـال ٣ :
- في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن الأحداث الأوليـة هي H , T .
- في تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين فإن الأحداث الأوليـة هي HH, HT, TH, TT .
- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الأحداث الأوليـة هي 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .

تعريف ٤ : الحدث المركب Compound Event
الحدث المركب هـو اتحاد أي عدد من الأحداث البسيطة .

تعريف ٥ : الحدث Event
الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S لأي تجربة عشوائيـة ولذلك يسـمى حدث عشوائي ويرمز للحدث بأحد الرموز الكبيرة A , B , C , ... أو $A_1, A_2, A_3, \dots$ ونقول أن الحدث قد وقع أو ظهر إذا ظهر أحد عنـاصره عند أجراء التجربة .

وحيث أن المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئيـــة مـــن أي مجموعـــة ، أي أن $\Phi \subset S$
وبالتالي فإن المجموعة الخالية Φ تمثل حدث يسمى الحدث المستحيل **Impossible Event**
وهى الحالة التى لا يكون فيها للتجربة أي نواتج وهذا بالطبع مستحيل لذلك سمـــى بـــالحدث
المستحيل وكذلك حيث أن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها , أي أن $S \subseteq S$
وبالتالي فإن فضاء العينة S يمثل حدث يسمى الحدث المؤكـد **Sure Event** وقـــد تم
تسميته بالحدث المؤكد لأنه عند إجراء التجربة فلابد وان يظهر أحد عناصر فضاء العينة S .
ومجموعة كل الأحداث التي يمكن تكوينها من فضاء العينة S ، أي مجموعة القوة من S تمثـل
فضاء يسمى فضاء الحوادث ويرمز له $\rho(S)$. وفى حالة فضاء عينة S محدود يحتوى على
n عنصر فإن فضاء الحوادث $\rho(S)$ يحتوى على 2^n حدث .

مثـــال ٤ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة فقط فإن فضاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

– الحدث A ظهور عدد زوجي يكون $A = \{2,4,6\}$
– الحدث B ظهور عدد فردي يكون $B = \{1,3,5\}$
– الحدث C ظهور عدد يقبل القسمة على 3 يكون $C = \{3,6\}$
– الحدث D ظهور عدد أكبر من 6 يكون $D = \Phi$ وهو حدث مستحيل .
– الحدث E ظهور عدد اقل من 7 يكون $E = S$ وهو حدث مؤكد .

مثـــال ٥ :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينـــة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

– الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين فقط هو

$$A_1 = \{HHT, HTH, THH\}$$

– الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل هو

$$A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$$

– الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر هو

$$A_3 = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

– الحدث A_4 ظهور الصورة مرتين على الأكثر هو

$$A_4 = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

مثـــال ٦ :

في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين فإن فضاء العينــــة يحتوى على ٣٦ عنصر كما هو موضـح

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- الحدث A_1 ظهور الرقم 3 على وجه حجر النرد الأول هو

$$A_1 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

- الحدث A_2 ظهور الرقم 3 على وجه حجر النرد الثاني هو

$$A_2 = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

- الحدث A_3 ظهور الرقم 3 على أحد حجري النرد

$$A_3 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

- الحدث A_4 ظهور نفس الرقم على حجري النرد

$$A_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

- الحدث A_5 أن يكون مجموع العدديين الظاهرين يساوى 7 هو

$$A_5 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

- الحدث A_6 أن يكون مجموع العدديين الظاهرين أقل من 4 هو

$$A_6 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

مثـــال ٧ :

صندوق يحتوى على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10 منها 6 كرات حمراء و الباقية بيضاء .

١ – إذا كانت التجربة هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق وبفرض أن الكرات الحمـراء تم ترقيمها من 1 إلى 6 والكرات البيضاء تم ترقيمها من 7 إلى 10 فإن فضاء العينة S_1 يكون

$$S_1 = \{1,2,3,\ \dots\ ,10\} \quad , \quad n(S_1) = 10$$

والحدث A أن تكون الكرة المسحوبة حمراء يكون $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ والحـدث B أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء يكون $B = \{7,8,9,10\}$.

٢ – إذا كانت التجربة هي سحب كرتين عشوائياً من الصندوق بحيث يتم إرجـــاع الكـــرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية فإن فضاء العينة S_2 يكون

$$S_2 = S_1 \times S_1 = \{(a,b) :\ a,b \in S_1\} \quad , \quad n(S_2) = 100$$

والحدث C أن تكون الكرة المسحوبة أولاً بيضاء يكون

$$C = \{(a,b) :\ a \in \{7,8,9,10\}\ ,\ b \in S_1\} \quad , \quad n(C) = 40$$

والحدث D أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء يكون

$$D = \{(a,b) :\ a \in S_1\ ,\ b \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \quad , \quad n(D) = 60$$

والحدث E أن تكون كل من الكرتين بيضاء هو

$$E = \{(a,b) :\ a\ ,b \in \{7,8,9,10\}\} \quad , \quad n(C) = 16$$

٣ – إذا كانت التجربة هي سحب كرتين عشوائياً من الصندوق بحيث لا يتم إرجاع الكـــرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية فإن فضاء العينة S_3 يكون

$$S_3 = S_1 \times S_1 = \{(a,b) :\ a,b \in S_1\ ,\ a \neq b\} \quad , \quad n(S_3) = 90$$

والأحداث $C\ ,D\ ,E$ المشار أليها في 2 تكون كالآتي :

$$C = \{(a,b) :\ a \in \{7,8,9,10\}\ ,b \in S_1\ ,\ a \neq b\} \quad , \quad n(C) = 40-4 = 36$$

$$D = \{(a,b) :\ a \in S_1\ ,\ b \in \{1,2,3,4,5,6\}\ ,a \neq b\} \quad , \quad n(D) = 54$$

$$E = \{(a,b) :\ a\ ,b \in \{7,8,9,10\}, a \neq b\} \quad , \quad n(C) = 12$$

مثـــال ٨ :

للعائلات التي لديها طفلان بفرض أن الرمز b يعني ولداً والرمز g يعني بنتـــاً فإنـــه مـــع مراعاة الأسبقية في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S=\{bb,bg,gb,gg\}$$

– إذا كان الحدث A_1 يعني عدم وجود ولد للعائلة فإن $A_1=\{gg\}$

– إذا كان الحدث A_2 يعني وجود ولد واحد على الأقل في العائلة فإن

$A_2=\{bb, bg, gb\}$

– إذا كان الحدث A_3 يعني وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة فإن

$A_3=\{bg, gb, gg\}$

– إذا كان الحدث A_4 يعني أن المولود الثاني بنت فإن

$A_4=\{bg, gg\}$

وللعائلات التي لديها ثلاثة أطفال فإنه مع مراعاة الأسبقية في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S=\{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}$$

وفي هذه الحالة فإن الأحداث A_1, A_2, A_3, A_4 السابقة تكون كالآتي :

$A_1=\{ggg\}$

$A_2=\{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\}$

$A_3=\{bgg, gbg, ggb, ggg\}$

$A_4=\{bgb, bgg, ggb, ggg\}$

مثـــال ٩ :

في تجربة اختيار عددا عشوائيا من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3, \dots, 1000\}$ فـإن فضاء العينة S هو $S=\{1,2,3, \dots, 1000\}$ وعدد عناصره $n(S)=1000$

- الحدث A اختيار عدد زوجي يكون $A=\{2m : 1 \le m \le 500\}$
  وعدد عناصره $n(A)=500$
- الحدث B اختيار عدد فردي يكون $B=\{2m-1 : 1 \le m \le 500\}$
  وعدد عناصره $n(B)=500$.
- الحدث C اختيار عدد يقبل القسمة على 3 يكون $C=\{3m : 1 \le m \le 333\}$
  وعدد عناصره $n(C)=333$.

مثـــال ١٠ :

في تجربة سحب قطعتي نقود معدنيتين معاً عشوائياً من كيس يحتوى على قطع نقود متماثلة بـــه عدد 2 قطعة نقود من فئة 25 قرش ، 3 قطع من فئة 20 قرش ، قطعة واحدة من فئـــة 10 قروش وأربعة قطع من فئة 5 قروش . عين فضاء العينة للتجربة ثم وضح كل من الأحـــداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش وأقل من 50 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأقل .

٥ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأكثر .

الحل :

نفرض الحدث Q سحب قطعة نقود من فئة 25 قرش والحدث W سحب قطعة نقود مـــن فئة 20 قرش والحدث T سحب قطعة نقود من فئة 10 قروش والحدث F سحب قطعـــة نقود من فئة 5 قروش . إذن عند سحب قطعتي نقود معدنيتين معاً عشوائياً فإن فضاء العينـــة للتجربة يكون

$S = \{ QQ , QW, QT, QF, WW, WT, WF, TF, FF \}$

١ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش بالضبط هو

$\{QF , WT \}$

٢ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش هو

$\{ QQ , QW, QT , WW \}$

٣ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش وأقل من 50 قرش هو

$\{QW , QT , WW \}$

٤ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأقل هو

$\{ QQ , QW, QT , QF , WW, WT \}$

٥ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأكثر هو

$\{ QF , WT, WF, TF, FF \}$

مثـــال ١١ :

مجموعة متماثلة من ١٢كارت ملون بها 3 كروت حمراء ، 3 كروت زرقـــاء ، 3 كـــروت بيضاء ، 3 كروت خضراء . ثلاثة أشخاص قام كل منهم على التوالي بسحب كارت عشوائياً من مجموعة الكروت اكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ - الكروت مع الأشخاص الثلاثة من اللون الأحمر .

٢ - الكروت مع الأشخاص الثلاثة من نفس اللون.

٣ - الكروت مع الأشخاص الثلاثة مختلفة الألوان .

الحل : نفرض r ترمز إلى كارت لونه احمر ، b ترمز إلى كارت لونه ازرق ، w ترمـــز إلى كارت لونه ابيض ، g ترمز إلى كارت لونه اخضر . إذن فضاء العينة S لتجربة قيام كـــل من الأشخاص الثلاثة على التوالي بسحب كارت عشوائياً من مجموعة الكروت يكون

$S = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , i = 1 , 2 , 3 \}$

١ - نفرض الحدث A أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة حمراء ، إذن $A = \{ (r,r,r) \}$

٢ - نفرض الحدث B أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة من نفس اللون ، إذن

$B = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_1 = x_2 = x_3 \ , \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , i = 1 , 2 , 3 \}$

٣ - نفرض الحدث C أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة مختلفة الألوان ، إذن

$C = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \ , \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , i = 1 , 2 , 3 \}$

مثـــال ١٢:

مخزن للأجهزة الكهربائية به 30 جهاز راديو ، أراد أمين المخزن التحقق من صلاحية الأجـهزة ومعرفة ما إذا كانت تعمل أو لا تعمل . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح الحدث A أن كل الأجهزة تعمل والحدث B أن كل الاجهزة لا تعمل وكذلك الحـــدث C أن أول خمسة أجهزة فحصهم كانت لا تعمل بينما باقى الاجهزة تعمل .

الحل : نفرض أن x_i يرمز إلى الجهاز رقم i حيث $1 \le i \le 30$ وبفرض أن الرقـــم 0 يرمز إلى أن الجهاز لا يعمل والرقم 1 يرمز إلى أن الجهاز يعمل ، إذن يمكن تعريف فضاء عينة S للتجربـــة بـــــالصورة $S=\{(x_1 , x_2 , \ldots , x_{30}) : \ x_i \in \{0,1\} , 0 \le i \le 30 \}$

إذن الحدث A هو $A = \{ (1,1, \ldots ,1) \}$ والحدث B هـــو $B = \{ (0,0, \ldots ,0) \}$

والحدث C هو $C = \{ (0,0,0,0,0,1,1, \ldots ,1) \}$.

مثـــال ١٣ :

مصباحين كهربائيين وضعا في اختبار لمعرفة مدى صلاحية كل منهم وبفرض أن فترة التشـــغيل لكل منهم لن تتعدى 1600 ساعة ، عرف فضاء عينة مناسب لهذه التجربة وأوصف كل مـــن الأحداث الآتية :

١ – كل من المصباحين يكون غير صالح للعمل في اقل من 1000 ساعة .

٢ – كل من المصباحين يستمر صالح للعمل بعد 1000 ساعة .

٣ – أقل عمر لأياً من المصباحين يكون 1000 ساعة .

٤ – اكبر عمر لأياً من المصباحين يكون 1200 ساعة .

الحـــل :

نفرض أن x_i يرمز إلى فترة التشغيل للمصباح الكهربي رقـــم i حيـــث $1 \le i \le 2$
إذن يمكن تعريف فضاء العينة S للتجربة بالصورة

$$S = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le 1600 \quad , \quad x_2 \le 1600 \}$$

١ – نفرض الحدث A هو أن كل من المصباحين يكون غير صالح للعمل في اقل من 1000 ساعة ، إذن

$$A = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le 1000 \quad , \ x_2 \le 1000 \}$$

٢ – نفرض الحدث B هو أن كل من المصباحين يستمر صالح للعمل بعد 1000 ساعة ، إذن

$$B = \{ (x_1 , x_2) : \ 1000 \le x_1 \le 1600 \ , \ 1000 \le x_2 \le 1000 \}$$

٣ – نفرض الحدث C أن أقل عمر لأياً من المصباحين يكون 1000 ساعة ، إذن

$$C = \{ (x_1 , x_2) : \quad x_1 = 1000 \le x_2 \le 1600 \quad \text{OR} \quad x_2 = 1000 \le x_1 \le 1600 \}$$

٤ – نفرض الحدث D أن اكبر عمر لأيا من المصباحين يكون 1200 ساعة ، إذن

$$D = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le x_2 = 1200 \ \text{OR} \quad x_2 \le x_1 = 1200 \}$$

مثـــال ١٤ :

بائع جرائد يبدأ يوميا عمله ومعه 40 جريدة ، عرف فضاء عينة مناسب لتجربة معرفة أعداد الجرائد التي يبيعها في يومين متتاليين وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الأول .

٢ – بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الثاني .

٣ – بيع 5 جرائد على الأقل في كل من اليومين .

٤– عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول .

٥– مجموع ما تم بيعه في اليومين اكبر من 60 جريدة .

الحـــل :

نفرض أن x_1 يرمز إلى عدد الجرائد التي يبيعها في اليوم الأول ، x_2 يرمز إلى عدد الجرائد التي يبيعها في اليوم الثاني . إذن يمكن تعريف فضاء العينة S للتجربة بالصورة

$$S = \{ (x_1 , x_2) : \quad 0 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 40 \}$$

١ – نفرض الحدث A هو بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الأول ، إذن

$$A = \{ (x_1 , x_2) : \quad 5 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 40 \}$$

٢ – نفرض الحدث B هو بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الثاني ، إذن

$$B = \{ (x_1 , x_2) : \quad 0 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 5 \le x_2 \le 40 \}$$

٣ – نفرض الحدث C هو بيع 5 جرائد على الأقل في كل من اليومين ، إذن

$$C = A \cap B = \{ (x_1 , x_2) : \quad 5 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 5 \le x_2 \le 40 \}$$

٤ – نفرض الحدث D هو أن عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول ، إذن

$$D = \{ (x_1 , x_2) : \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le 40 \}$$

٥– نفرض الحدث E هو أن مجموع ما تم بيعه في اليومين اكبر من 60 جريدة ، إذن

$$E = \{ (x_1 , x_2) : \quad 60 < x_1 + x_2 \le 80 \}$$

مثـــال ١٥ :

حافلة للركاب (أتوبيس Bus) تتسع لعدد 34 راكب ، تتوقف الحافلة في محطـــة كليـــة التربية ما بين الساعة السابعة 7:00 والساعة السابعة والنصف 7:30 صباحا من كل يـوم . نفرض التجربة العشوائية التي تتكون من رصد عدد الركاب الموجود في الحافلة وقياس وقـــت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل مـــن الأحداث الآتية :

١ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 29 راكب ما بين الساعة السابعة والربع 7:15 والساعة السابعة والنصف 7:30 .

٢– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 .

٣– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب.

الحـــل :

فضاء العينة S للتجربة العشوائية التي تتكون من رصد عدد الركاب الموجـــــود في الحافلـــة وقياس وقت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية يمكن التعبير عنه بالصورة الآتية

$$S = \{ (i,t): \quad 0 \le i \le 34 \quad , \quad 7 \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

والرمز i يمثل عدد الركاب في الحافلة في وقت الوصول إلى المحطة والزمن يعبر عنه بالرمز t وهو مقاس بالساعات وكسورها .

١ – نفرض الحدث A هو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها 29 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:30 . إذن

$$A = \{ (29,t): \quad 7\frac{1}{4} \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

٢– نفرض الحدث B هو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20. إذن

$$B = \{ (i,7\frac{1}{3}): \ 0 \le i \le 34 \ \}$$

٣– نفرض الحدث C هو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب. إذن

$$C = \{ (26,7\frac{1}{3}) \}$$

ملاحظة هامة :

التمثيل المختلف لنواتج التجربة العشوائية يمكن أن يؤدي إلى تمثيل مختلف لفضاء العينة للتجربة العشوائية نفسها

في المثال السابق كانت التجربة العشوائية تتكون من رصد عدد الركاب الموجـود في الحافلـة وقياس وقت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية ، وعناصر فضاء العينة لهذه التجربة تم تمثيلـها بأزواج مرتبة (i,t) حيث الرمز i يمثل عدد الركاب في الحافلة في وقـت الوصـول إلى المحطة والرمز t يعبر عن زمن الوصول إلى المحطة وهذا الزمن مقاس بالساعات وكسـورها ، وبناء على ذلك فإن فضاء العينة S للتجربة العشوائية تم التعبير عنه بالصورة

$$S = \{ (i,t) : \ 0 \le i \le 34 \ , \ 7 \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

والآن إذا مثلنا عناصر فضاء العينة لهذه التجربة بأزواج مرتبة (i,t) حيث t هـي عـدد الدقائق بعد الساعة السابعة التي تصل فيها الحافلة إلى المحطة وبها عدد i من الركاب ، فبنـاء على ذلك فإن فضاء العينة S^* لنفس التجربة العشوائية يمكن التعبير عنه بالصورة

$$S^* = \{ (i,t) : \ 0 \le i \le 34 \ , \ 0 \le t \le 30 \ \}$$

ونتيجة لذلك فإن الأحداث A , B , C في المثال السابق يمكن التعبير عنها كالآتى :

١ - الحدث A وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها 29 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:30 أي أنها تصل ما بين 15 إلى 30 دقيقة بعد السابعة يكون

$$A = \{ (29,t) : \quad 15 \le t \le 30 \ \}$$

٢- الحدث B وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة 7:20 أي بعد 20 دقيقة من السابعة

$$B = \{ (i,20) : \ 0 \le i \le 34 \ \}$$

٣- الحدث C وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 26 راكب الساعة 7:20 أي بعد 20 دقيقة من السابعة

$$C = \{ (26,20) \}$$

مثــال ١٦ :

نفرض تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع . أكتــب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 200 ساعة على الأقل .

٢ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 1000 ساعة على الأكثر .

٣ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 465 ساعة بالضبط .

٤ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة تتراوح بين 400 ساعة و 600 ساعة .

الحــل :

العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية يقاس بالساعات وكسورها ، إذن فضاء العينة S هــذه التجربة يكون $S = \{ x : x \geq 0 \}$ حيث x عدد حقيقي غير سالب يمثل الزمن مقاس بالساعات وكسورها من دقائق وثواني .

١ – الحدث A_1 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 200 ساعة على الأقل .

$$A_1 = \{ x : x \geq 200 \}$$

٢ – الحدث A_2 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 1000 ساعة على الأكثر

$$A_2 = \{ x : x \leq 1000 \}$$

٣ – الحدث A_3 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 465 ساعة بالضبط $A_3 = \{465\}$

٤ – الحدث A_4 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة تتراوح بين 400 و 600 ساعة

$$A_4 = \{ x : 400 \leq x \leq 600 \}$$

مثــال ١٧ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجــه الصــورة لأول مرة فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون $S=\{1,2,3, \ldots, \infty\}$ حيث الرمز ∞ يمثل حالة عدم ظهور الصورة على الإطلاق على الرغم من إلقاء قطعة النقود عدد لانهــائي مــن المرات ، وفى هذه التجربة فإن فضاء العينة يكون لا نهائي قابل للعد وكل حــدث أولى في S يمثل عدد مرات إلقاء العملة المعدنية حتى يظهر وجه الصورة لأول مــرة ، فمثــلا الحــدث $A = \{46\}$ يعنى ظهور وجه الصورة لأول مرة في الرمية رقم 46 ، وهذه التجربة تعتــبر مثالا لفضاء عينة لانهائي قابل للعد Countable Infinite Sample Space .

مثال ١٨ :

في هذا المثال نوضح بعض التجارب العشوائية التي يكون فيها فضاء العينة لانهائي وغير قـــابل للعد **Uncountable Infinite Sample Space** .

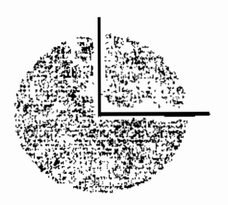
– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون $S = \{ x : a \le x \le b \}$

a b

فمثلا في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة $]0,15[$ فإن فضاء العينة في هذه التجربة يكون $S = \{ x : 0 < x < 15 \}$ والحدث A أن يتم اختيار عدد صحيح هو

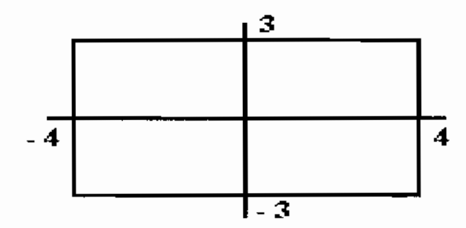
$$A = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots , 14 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة في المســـتوى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



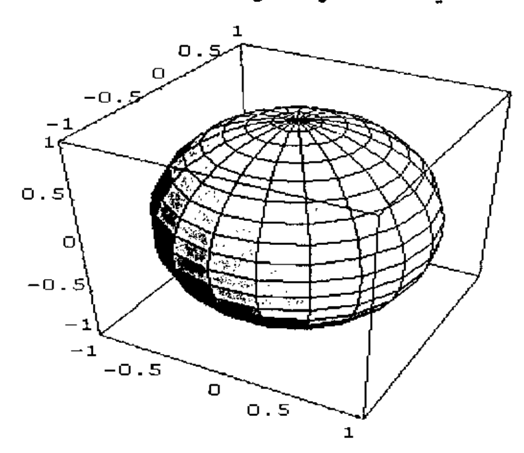
$$S = \{ (x,y) : x^2 + y^2 < r \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على محيط أو داخل المســـتطيل المحـــدود بالمســـتقيمات $x=\pm 4$, $y=\pm 3$ ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



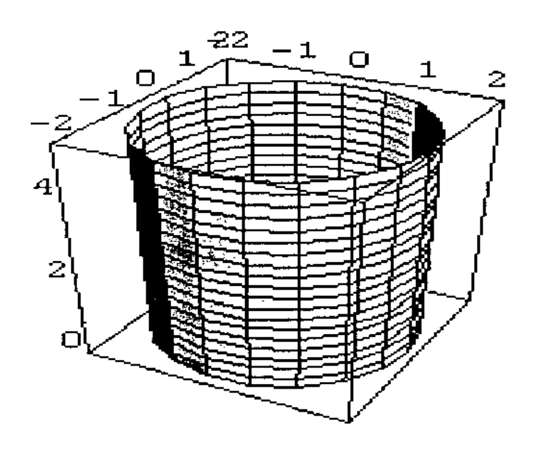
$$S = \{ (x,y) : -4 \le x \le 4 , -3 \le y \le 3 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل كرة في الفراغ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها **1** ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



$$S = \{ (x,y,z) : \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على أو داخل سـطح الاسـطوانة $x^2 + y^2 = 4$ في الفراغ والمحدودة بالمستويات $z = 5$, $z = 0$ ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



$$S = \{ (x,y,z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 0 \le z \le 5 \; \}$$

٣ - الأشجار البيانية Tree Diagrams

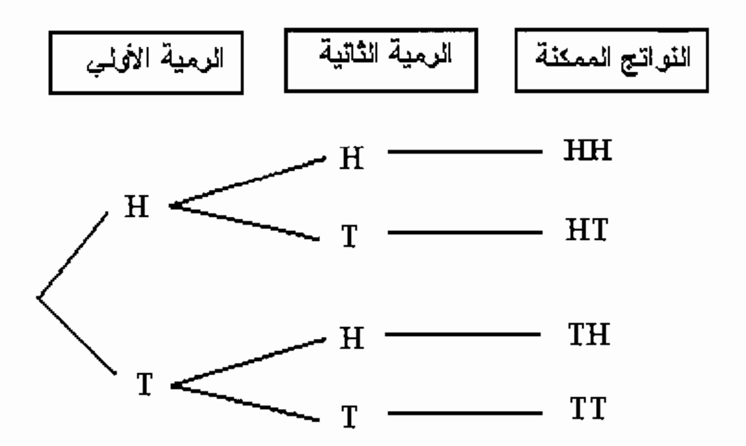
الشجرة البيانية هي طريقة مفيدة تستعمل لحصر كل المشاهدات أو النواتج التي يمكـــن ظهورها عند أجراء متتابعة من التجارب حيث كل تجربة منها تقع بعدد منتـــه مـــن الطـــرق وتتكون الشجرة البيانية من عدد من الأفرع توضح النواتج التي يمكـــن الحصـــول عليـــها في التجارب التي يتم تنفيذها ويمكن مباشرة قراءة النواتج النهائية الممكنة والتي تُمثل عدد عنـــاصر فضاء العينة وذلك من النقاط النهائية على الأفرع المختلفة للشجرة . والأمثلة الآتية توضـــح فائدة الشجرة البيانية وكيفية تركيبها وبالتالي كيفية الحصول على عدد عناصر فضاء العينة .

مثـــال ١٩ :

في تجربة إلقاء عملة معدنيـــة مرتين على التوالي فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ويمكن الحصول على فضاء العينة من الشجرة البيانية الموضحة



ونلاحظ أن الشجرة تم تركيبها من اليسار إلى اليمين وان عدد الأفرع في كل نقطـــة يكـــافئ عدد النواتج الممكنة للتجربة التالية ، والعدد الكلى للنواتج الممكنة وبالتالي عدد عناصر فضـــاء العينة يساوى عدد نقاط النهاية لفروع الشجرة البيانية ، وفي هذا المثال نلاحظ أن عدد نقاط النهاية لفروع الشجرة البيانية يساوى 4 لذلك $n(S) = 4$.

مثـــال ٢٠ :

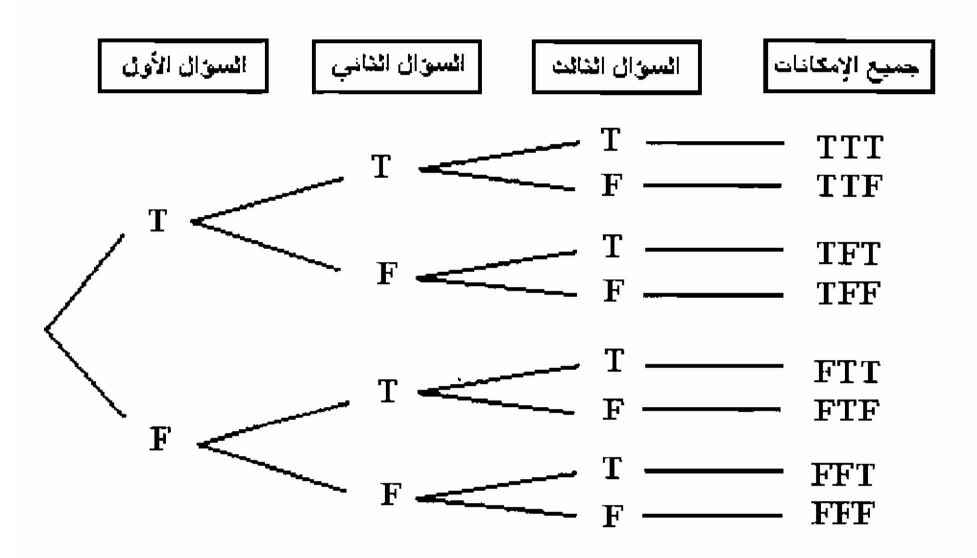
اختبار من ثلاثة أسئلة كل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F . أرسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية :

١ – الإجابة صواب على سؤال على الأكثر .

٢ – الإجابة صواب على سؤالين على الأقل .

٣ – الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر .

الحـــل :



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ويمكن مباشـــرة قـــراءة النواتج النهائية الممكنة والتي تُمثل عدد عناصر فضاء العينة وذلك من على الأفرع المختلفـــة للشجرة . إذن فضاء العينة S الذي يمثل جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار يكون

$$S = \{ TTT , TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

١ – الحدث الإجابة صواب على سؤال على الأكثر هو

$$\{ TFF , FTF , FFT , FFF \}$$

٢ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأقل هو

$$\{ TTT , TTF , TFT , FTT \}$$

٣ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر هو

$$\{ TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

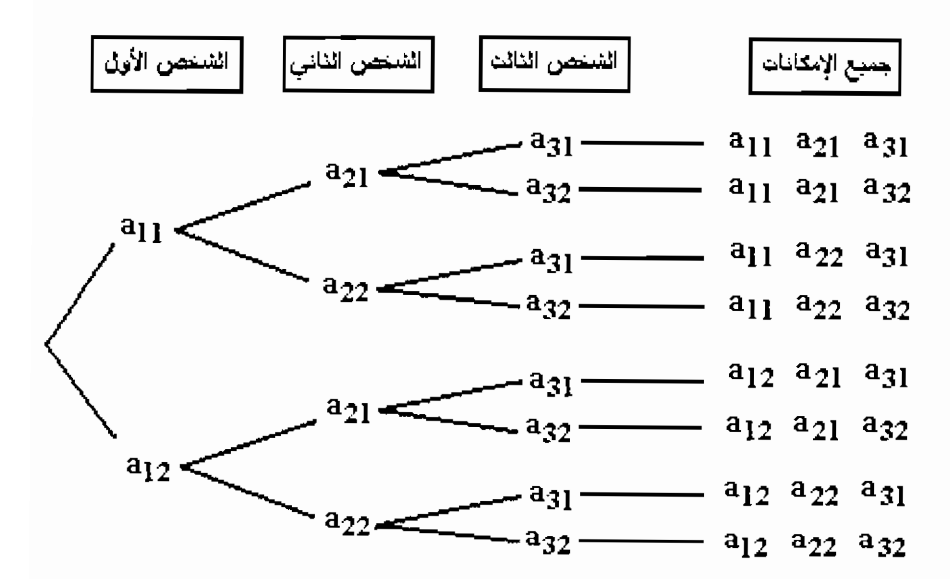
مثـــال ٢١ :

يوجد ثلاثة أشخاص بمحطة مترو وعند وصول قطار مترو من عربتان صعد الأشخاص الثلاثـــة إلى القطار . ارسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة لصعود الأشخاص الثلاثـــة إلى عربتي القطار ، ووضح الحدث صعود شخص واحد على الأقل في كل عربة .

الحـــل :

نفرض أن a_{ij} تعنى أن الشخص رقم i صعد إلى العربة رقم j حيث

$$1 \le i \le 3 \quad , \quad 1 \le j \le 2$$



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة ونلاحظ انه توجد 8 نقاط نهائية مـــن علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد الإمكانات المتاحـــة . إذن فضـــاء العينـــة لتجربة صعود الأشخاص الثلاثة إلى عربتي القطار يكون

$$S = \{a_{11}\, a_{21}\, a_{31} , a_{11}\, a_{21}\, a_{32} , a_{11}\, a_{22}\, a_{31} , a_{11}\, a_{22}\, a_{32} , a_{12}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{21}\, a_{32} , a_{12}\, a_{22}\, a_{31} , a_{12}\, a_{22}\, a_{32} \}$$

والحدث صعود شخص واحد على الأقل في كل عربة هو مكملة الحدث صعـــود الأشـــخاص الثلاثة في عربة واحدة $\{a_{11}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{22}\, a_{32}\}'$ أي أنه الحدث

$$\{ a_{11}\, a_{21}\, a_{32} , a_{11}\, a_{22}\, a_{31} , a_{11}\, a_{22}\, a_{32} , a_{12}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{21}\, a_{32} , a_{12}\, a_{22}\, a_{31} \}$$

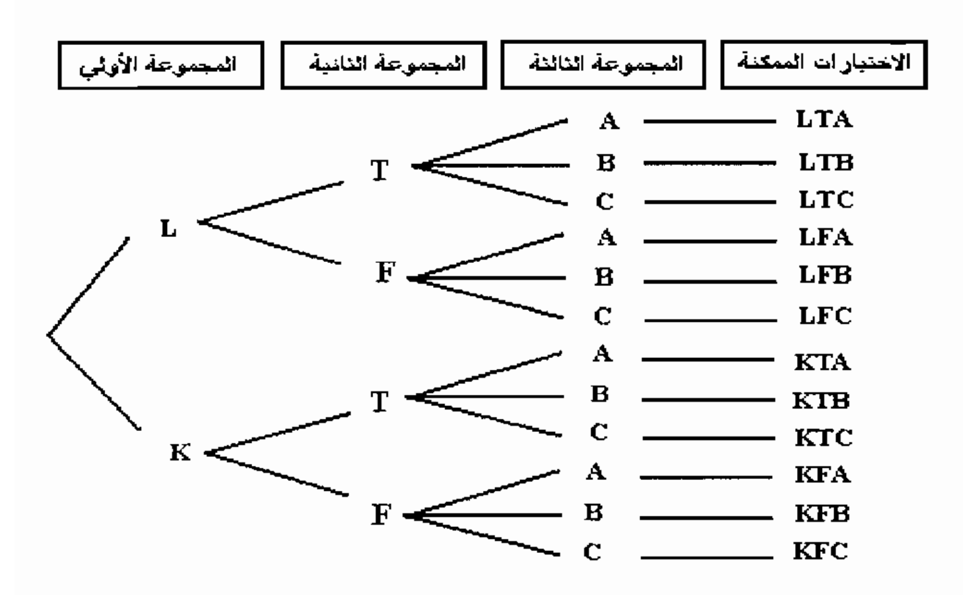
مثـــال ٢٢ :

في أحد الفنادق كان حجز الغرف يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول

المجموعة الأولى (عدد الآسرة)	المجموعة الثانية (الموقع)	المجموعة الثالثة (الطابق)
غرفة بسرير واحد L	تطل على البحر T	الطابق الأول A
غرفة بسريرين K	لا تطل على البحر F	الطابق الثاني B
		الطابق الثالث C

ارسم شجرة بيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة واكتب فضاء العينة ، ثم وضـــح الحـــدث حجز جناح بسريرين يطل على البحر .

الحـــل :



الشجرة البيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة ونلاحظ انه توجد 12 نقطة نهائية من علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد الاختيارات الممكنة . إذن فضاء العينة

S = { LTA , LTB , LTC , LFA , LFB , LFC ,
KTA , KTB , KTC , KFA , KFB , KFC }

والحدث حجز جناح بسريرين يطل على البحر هو الحدث {KTA,KTB,KTC} .

مثـــال ٢٣ :

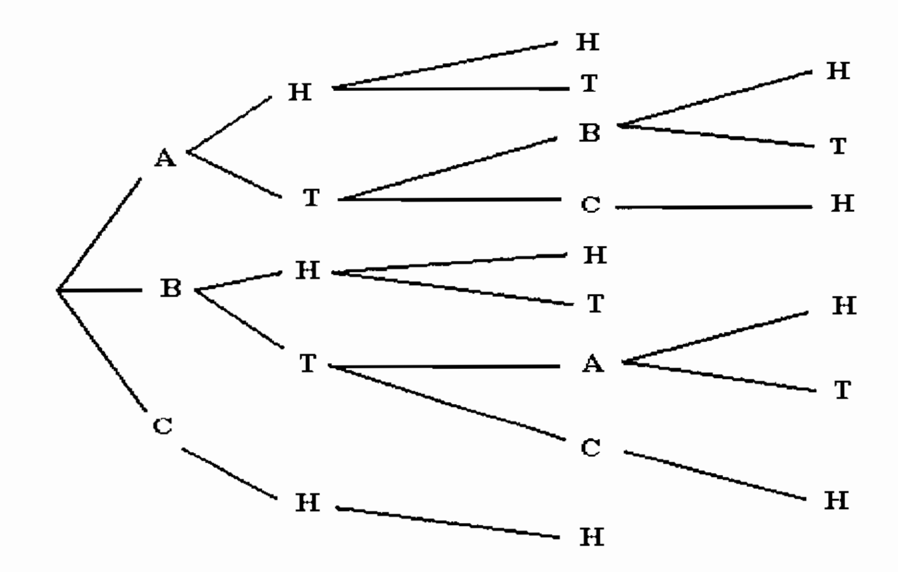
كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة مـــن الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخـــرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فإنه يتم اختيار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقـــى . ارسم شجرة بيانية للتجربة واكتب فضاء العينة ، ثم اكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث ظهور الصورة مرتين .

٢ – الحدث عدم ظهور الصورة .

الحـــل :

نفرض أن A , B يرمزان إلى قطعتي النقود العاديتين ، C ترمز إلى قطعة النقود ذات الصورتين



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات للتجربة ونلاحظ انه توجد 11 نقطة نهائية من علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد النواتج الممكنة للتجربة . إذن فضاء العينة

S = { AHH , AHT , ATBH , ATBT , ATCH ,
BHH , BHT , BTAH , BTAT , BTCH , CHH }

١ – الحدث ظهور الصورة مرتين يكون { AHH , BHH , CHH }

٢ – الحدث عدم ظهور الصورة يكون { ATBT , BTAT } .

مثـــال ٢٤ :

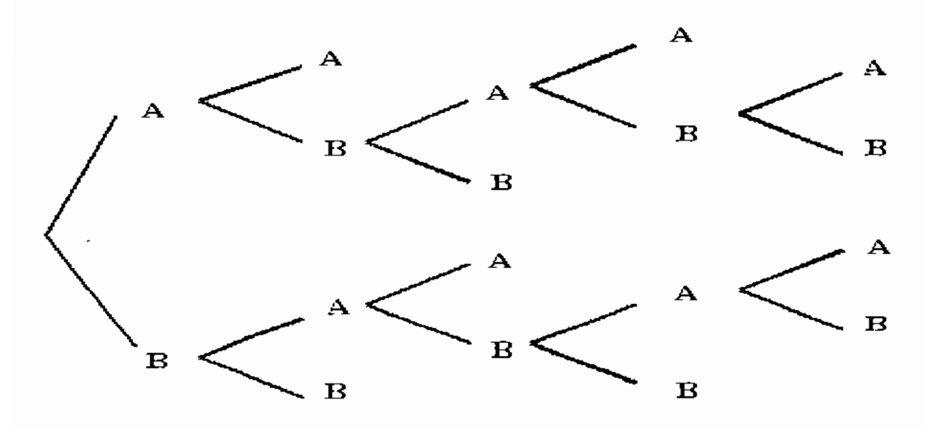
في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتـــاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع النواتـــج الممكنـــة للمباراة ، واكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط .

٢ – الحدث أن اللاعب A يفوز بالمباراة .

الحـــل :

نفرض أن الحدث A يعني فوز اللاعب A وأن الحدث B يعني فوز اللاعب B



الشجرة البيانية توضح جميع النواتج الممكنة للمباراة ويمكن مباشرة قراءة النواتـــج النهائيـــة الممكنة والتي تمثل عدد عناصر فضاء العينة وذلك من على الأفرع المختلفة للشـــجرة حيـــث نلاحظ انه توجد عشر نقاط نهائية ، كل نقطة منهم تُمثل أحد النواتـــج العشـــرة الممكنـــة للمباراة . إذن فضاء العينة S الذي يُمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة

S = { AA , ABAA , ABABA , ABABB , ABB ,
BAA , BABAA , BABAB , BABB , BB }

١ – الحدث أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط هو

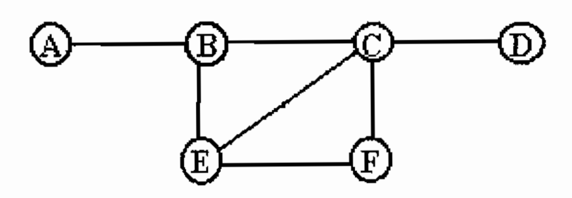
{ ABABA , ABABB , BABAA , BABAB }

٢ – الحدث أن اللاعب A يفوز بالمباراة هو

{ AA , ABAA , ABABA , BAA , BABAA }

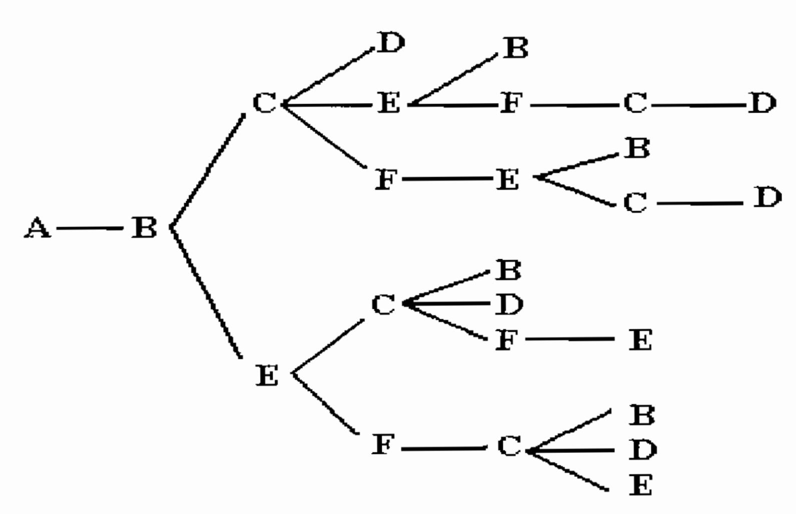
مثـــال ٢٥ :

النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل على



جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعــتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يُمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجــد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن قبل أن يتوقف للاستراحة .

الحــل :



نلاحظ من الشجرة البيانية أنه توجد 11 طريقة يمكن للرجل أن يتجول بها حــتى يصــل إلى جسر مر عليه من قبل ويكون مضطر للعبور عليه مرة ثانية وبالتالي يأخذ استراحة ،كما نلاحظ من الشجرة في النقاط النهائية أنه يجب أن يتوقف للاستراحة في أحد المدن B أو D أو E .

إذن فضاء العينة

S = { ABCD, ABCEB, ABCEFCD, ABCFEB, ABCFECD, ABECB, ABECD, ABECFE, ABEFCB, ABEFCD, ABEFCE}

مثـــال ٢٦ :

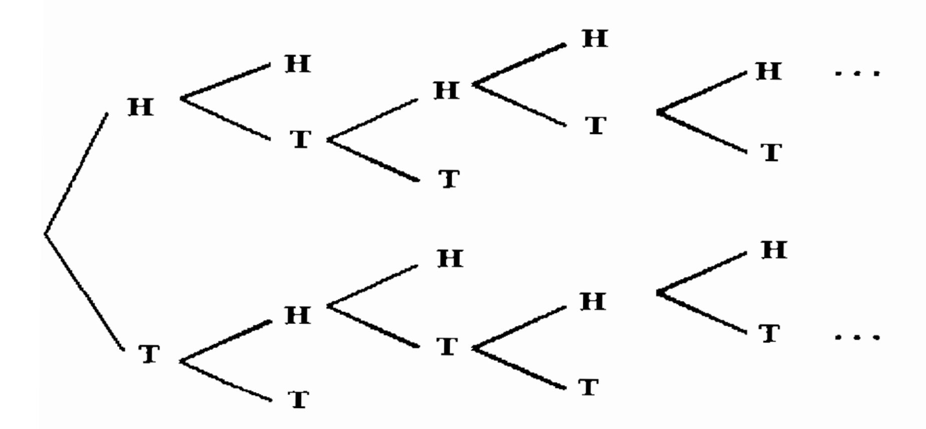
في تجربة إلقاء عملة معدنيـــة باستمرار حتى نحصل على نفس الوجه مرتين متتاليتين ، عــــرف فضاء العينة للتجربة وأوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث إنهاء التجربة بعد إلقاء العملة للمرة الثالثة .

٢– الحدث إنهاء التجربة قبل الرمية الخامسة .

٣– الحدث أن تستمر التجربة أربع رميات على الأكثر .

الحـــل :



فضاء العينة في هذه التجربة لا نهائي قابل للعد ويكون

$$S = \{ HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT,HTHTT,THTHH , \ \ldots \}$$

١ – نفرض الحدث A هو أن تنتهي التجربة بعد إلقاء العملة للمرة الثالثة أي انه بعد إلقـــاء العملة للمرة الثالثة يتحقق ظهور نفس الوجه مرتين متتاليتين ، إذن

$$A = \{ HTT,THH \}$$

٢– نفرض الحدث B هو أن تنتهي التجربة قبل الرمية الخامسة ، أي أن الحـــدث B هـــو ظهور نفس الوجه مرتين متتاليتين قبل الرمية الخامسة ، إذن

$$B = \{ HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT \}$$

٣– نفرض الحدث C هو أن تستمر التجربة أربع رميات على الأكثر ، أي أن الحدث C هو أن تنتهي التجربة بعد إلقاء العملة مرتين أو ثلاث أو أربع مرات ، إذن

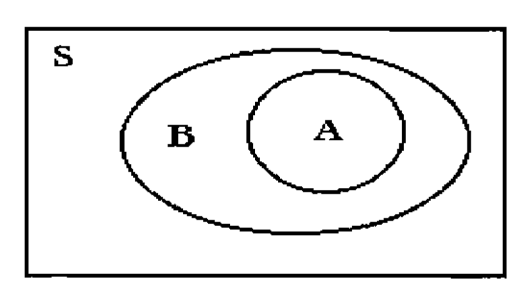
$$C = \{ HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT \}$$

٣ - الأحداث ونظرية المجموعات Events and Set Theory

في دراستنا لنظرية الاحتمال فإن العلاقات بين الأحداث المختلفة للتجربة العشوائية تلعب دوراً رئيسياً في هذه الدراسة وسوف نتعرف الآن على هذه العلاقات وكيفية التعبير عنها باستخدام المجموعات وكذلك سوف نستخدم أشكال فن لتمثيل العلاقات بين الأحداث وفضاء العينة S للتجربة العشوائية حيث نستخدم شكل المستطيل لتمثيل فضاء العينة S ونستخدم الدوائر أو أي أشكال هندسية أخرى داخل S لتمثل الأحداث المرتبطة بالتجربة كما سيتضح من خلال التعريفات الآتية :

تعريف ٦ :

الحدث A يقال انه مجموعة جزئية من الحدث B إذا كان جميع الأحداث الأولية المكونة للحدث A موجودة داخل الحدث B وبلغة المجموعات يتم التعبير عن ذلك بالصورة $A \subseteq B$ أي أن A محتواه في B وهذا يعنى أن وقوع الحدث A يتضمن وقوع الحدث B وبمعنى آخر أنه إذا وقع الحدث A فإن الحدث B يقع ايضاً



شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ
أن الحدث A داخل الحدث B

تعريف ٧ :

الحدثان A , B يقال انهما متساويان إذا كان وقوع الحدث A يؤدى إلى وقوع الحدث B ووقوع الحدث B يؤدى الى وقوع الحدث A وبلغة المجموعات يتم التعبير عن ذلك بالصورة

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \quad , \quad B \subseteq A$$

تعريف ٨ :

يقال أن حدث ما هو تقاطع حدثان A , B إذا كان هذا الحدث يقع فقط عندما يقع A , B معاً في نفس الوقت وبلغة المجموعات يرمز له

$$A \cap B$$

لأنه يحتوى على الأحداث الأولية المشتركة بين A , B وبمعنى آخر $A \cap B$ يرمز لوقوع الحدثان معاً.

تعريف ٩ :

يقال أن حدث ما هو اتحاد حدثان A , B إذا كان هذا الحدث يقع عندما يقع على الأقل واحد من A أو B وبلغة المجموعات يرمز له

$$A \cup B$$

لأنه يحتوى على الأحداث الأولية في A أو B أو كليهما وبمعنى آخر $A \cup B$ يرمز لوقوع إحدى الحدثان على الأقل .

تعريف ١٠ :

يقال أن حدث ما هو مكملة الحدث A إذا كان هذا الحدث يقع فقط عندما لا يقع A ويرمز لمكملة الحدث A بالرمز A' ومن الواضح أن A' يتكون من عناصر S التى لا تنتمى إلى A ، أي أن

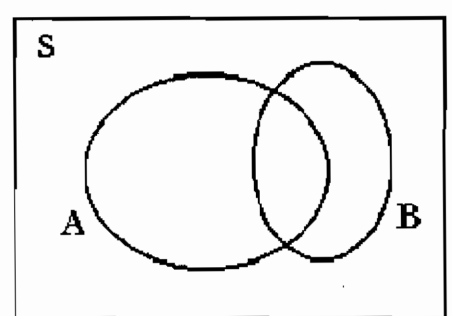
$$A' = S - A$$

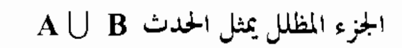
تعريف ١١ :

الفرق بين حدثان A , B هو حدث يرمز له $A - B$ وهو يتكون من عناصر A والتى لا تنتمى إلى B ، أي أن $A - B$ يرمز لوقوع A وعدم وقوع B وهو يقع فقط عندما يقع A , B' معاً في نفس الوقت وبلغة المجموعات يعرف بالصورة

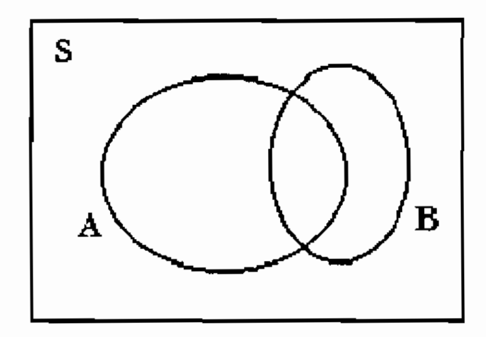
$$A - B = A \cap B'$$

نفرض الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . العمليـــــات على الأحداث (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق) موضحة في أشكال فن الآتية :

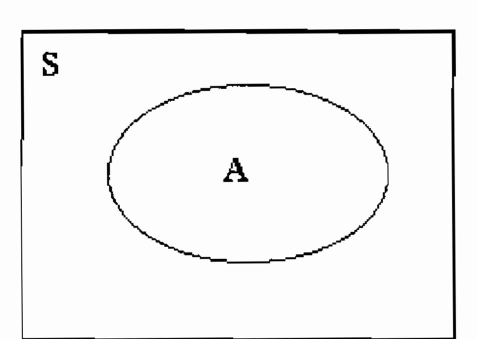




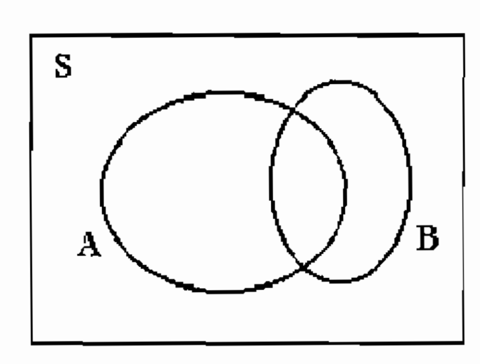
الجزء المظلل يمثل الحدث $A \cup B$



الجزء المظلل يمثل الحدث $A \cap B$



الجزء المظلل يمثل الحدث A'



الجزء المظلل يمثل الحدث $A - B$

مثـــال ٢٧ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين على التوالي لملاحظة ظهور الصورة ، فإن فضاء العينة

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

وإذا كان الحدث A هو ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل والحدث B هو ظهور الصـــورة مرتين بالضبط فإن

$$A = \{HH,HT,TH\} \quad , \quad B = \{HH\}$$

$$A \cup B = \{HH,HT,TH\} = A \quad , \quad A \cap B = \{HH\} = B$$

$$A' = \{TT\} \quad , \quad A - B = \{HT,TH\}$$

مثـــال ٢٨ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة فقط فإن فضاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كـــان الحدث A هو ظهور عدد زوجي ، الحدث B هو ظهور عدد فردي والحدث C هو ظـــهور عدد يقبل القسمة على 3 فإن $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{3,6\}$

– الحدث وقوع B و C هو $B \cap C$ ويعنى ظهور عدد فردى ويقبل القســـمة علـــى 3 وهو يقع إذا وقع B , C في آن واحد ونلاحظ أن $B \cap C = \{3\}$.

– الحدث وقوع B أو C هو $B \cup C$ ويعنى ظهور عدد فردى أو عدد يقبل القسمة على 3 وهو يقع إذا وقع B أو C أو كليهما ونلاحظ أن $B \cup C = \{1,3,5,6\}$.

– الحدث B' هو $B' = S - B = \{2,4,6\} = A$.

– الحدث $A - C$ نحصل عليه من $A - C = A \cap C'$ وحيث أن $C' = \{1,2,4,5\}$ ، إذن

$$A - C = \{2,4,6\} \cap \{1,2,4,5\} = \{2,4\}$$

مثـــال ٢٩ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي لملاحظـــة ظـــهور الصـــورة ، إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة 3 مرات على الأقل ، الحدث B هو ظهور الصورة مرتين على الأكثر والحدث C هو ظهور الصورة مرتين بالضبط أوجد فضاء العينة للتجربة ووضح كل من الأحداث $A \cap B$, $B \cap C$, A' , B' , $A - B$, $B - C$.

الحـــل :

فضاء العينة S للتجربة والأحداث A , B , C تكون

$$S = \{HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT,$$
$$THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

$$A = \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$
$$B = \{HHTT, HTHT, HTTH, HTTT, THHT, THTH,$$
$$THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

$$C = \{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$$

إذن

$$A \cap B = \Phi \quad , \quad B \cap C = C \quad , \quad A - B = A$$
$$B' = \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$
$$B - C = \{HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

مثـــال ٣٠ :

في أحد المطارات الدولية المزدحمة يتم اختيار سيارات الأجرة التي يأخذها الركاب وفقاً لـترتيب وصولها إلى المطار. نفرض الحدث A وجود 5 سيارات على الأقل تنتظـــر دورهـــا لتـــأخذ الركاب ، الحدث B وجود 3 سيارات على الأكثر والحدث C يوجد سيارتين بـــالضبط .

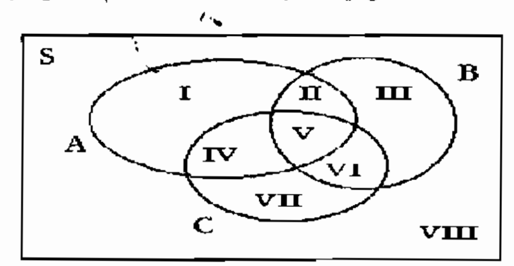
عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \ , \ B' \ , \ A-B \ , \ B\cap C \ , \ A\cap B \ , \ A\cap C \ , \ B\cap C' , \ A\cap C'$$

الحـــل :

- حيث أن الحدث A هو وجود 5 سيارات على الأقل فإن A' هو الحـــدث وجـــود 4 سيارات على الأكثر تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- حيث أن الحدث B وجود 3 سيارات على الأكثر فإن B' هـــو الحـــدث وجـــود 4 سيارات على الأقل تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- الحدث $A-B$ هو الحدث $A\cap B'$ وحيث أنه إذا وقع الحدث A والـــذى يُمثـــل وجود 5 سيارات على الأقل فإن الحدث B' والذى يُمثل وجود 4 سيارات على الأقل يقع ايضاً ، إذن $A\subseteq B'$ وبالتالي ينتج أن $A\cap B' = A$.
- حيث أنه إذا وقع الحدث C فإن B يقع ايضاً ، أي أن $C\subseteq B$ وبالتالي $B\cap C = C$.
- الحدثان A , B لا يوجد وقوع مشترك بينهما أي أن $A\cap B = \Phi$.
- الحدثان A , C لا يوجد وقوع مشترك بينهما أي أن $A\cap C = \Phi$.
- حيث أن الحدث B هو وجود 3 سيارات على الأكثر أي وجود عـــدد 0 ، 1 ، 2 أو 3 من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب وحيث أن الحدث C هـــو وجـــود ســـيارتين بالضبط فإن الحدث C' هو وجود أي عدد من السيارات لا يساوى 2 وبالتـــالي فـــإن الحدث $B\cap C'$ هو الحدث وجود عدد 0 ، 1 أو 3 من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- حيث أن الحدث A هو وجود 5 سيارات على الأقل أي وجود عدد n من الســـيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب حيث $n \geq 5$ وحيث أن الحدث C' هو وجود أي عـــدد من السيارات لا يساوى 2 أي $n \neq 2$ وبالتالي فإن الحدث $A\cap C'$ هـــو الحـــدث وجود عدد n من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب حيث $n \geq 5$.

وعند التعامل مع ثلاثة أحداث A , B , C من فضاء عينة S ولكـــي نتمكـــن مـــن توضيح جميع العلاقات بينها فإنه يفضل في بعض الأحيان استخدام شكل فن الآتى :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة الأحداث المختلفـــة ، فمثـــلا

الحدث $A \cap B \cap C$ يمثله المنطقة V

الحدث $A \cup (B \cap C)$ يمثله المناطق I , II , IV , V , VI

الحدث $(A \cup B) \cap C$ يمثله المناطق IV , V , VI

الحدث $(A \cup B)'$ يمثله المناطق $VII , VIII$

وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين الأحداث وإنما يمكن اســـتخدامها في التعرف على عدد العناصر في الأحداث المختلفة ، حيث يتم كتابة العدد الممثل لعدد العنـــاصر داخل المنطقة الممثلة للحدث .

والأحداث $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \ , \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ , \ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ يتم تعريفها بنفس طريقـــة تعريف $A_1 \cap A_2 \ , \ A_1 \cup A_2$ فمثلا إذا كان $\{ A_1, A_2, \ \dots \ , A_n \}$ مجموعة من الأحداث فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو الحدث الذى يتكون من عناصر واحـــد علـــى الأقـــل مـــن الأحـــداث $A_1, A_2, \ \dots \ , A_n$ وهو يرمز لوقوع حدث واحد على الأقل من هذه الأحـــداث ، أي أن الحدث $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ يقع عندما يقع واحد على الأقل من الأحـــداث $A_i \ , \ 1 \le i \le n$.

وأيضا $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو الحدث الذى يتكـــون مـــن العنـــاصر المشـــتركة بـــين الأحـــداث $A_1, A_2, \ \dots \ , A_n$ وهو يرمز لوقوع جميع هـــذه الأحـــداث معـــاً ، أي أن الحـــدث $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ يقع فقط عندما يقع كل من الأحداث $A_i \ , \ 1 \le i \le n$.

ومن معرفتنا للمجموعات فإن الاتحاد والتقاطع والمكملة يحقق العديد من العلاقات المفيدة عند تطبيقها على الأحداث وفى الجدول الآتى نعرض قائمة من القوانين التى يمكن تطبيقها على أى أحداث A , B , C من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما

اسم القانون	علاقات مفيدة بين الأحداث
قوانين اللانمو Idempotent Laws	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قوانين الإبدال Commutative Laws	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانين الدمج Associative Laws	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
قوانين التوزيع Distributive Laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانين الوحدة Identity Laws	$A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap S = A$ $A \cup S = S \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$
قوانين المكملة Complement Laws	$A \cup A' = S \quad , \quad A \cap A' = \Phi$ $S' = \Phi \quad , \quad \Phi' = S \quad , \quad A'' = A$
قوانين ديمورجان De Morgan's Laws	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ويمكن تطبيق قوانين ديمورجان لأي عدد منتهى أو لانهائى من الأحداث فبوجه عام

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A'_i \quad , \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A'_i \quad , \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i$$

وجميع هذه القوانين بالإضافة إلى قوانين أخرى يمكن إثباتها باستخدام طريقة انتماء العنصر كما في المجموعات مع الأخذ في الاعتبار أن العنصر في هذه الحالة هو حدث أولى وتعتمد الفكرة

الأساسية كما في المجموعات على أن الأحداث في طرفي المعادلة تتكون من نفـــس الأحـــداث الأولية . أي أن الأحداث الأولية التي تنتمي إلى الحدث على يسار المعادلة تنتمـــي أيضـــا إلى الحدث على يمين المعادلة والعكس صحيح .

مثـــال ٣١ :

لأي حدثان A , B وباستخدام طريقة انتماء العنصر اثبت صحة قانون ديمورجان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

الحـــل : من شرط تساوى حدثان نحاول إثبات

$$1-(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$
$$2-\ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

ولإثبات (1)

نفرض الحدث الأولي x حيث $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ولإثبات (2)

نفرض الحدث الأولي x حيث $x \in A' \cap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

إذن لأي حدثان A , B يتحقق قانون ديمورجان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

نظرية ١ : إذا كان A , B حدثان من فضاء عينة S فإن عدد عناصر $A \cup B$ يكون

$$n (A \cup B) = n (A) + n (B) - n (A \cap B)$$

وإذا كانت A , B , C ثلاث أحداث فإن

$$\begin{aligned} n (A \cup B \cup C) = & \, n (A) + n (B) + n (C) - n (A \cap B) \\ & - n (A \cap C) - n (B \cap C) + n (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن حساب عدد عناصر الحدث وقوع واحد على الأقل من الأحداث الأربعة A_1 , A_2 , A_3 , A_4 أي حساب $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ ويكون بالصورة

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = & \, n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) \\ & - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) \\ & - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

أي في الصورة

$$\begin{aligned} n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i \right) = & \sum_{i=1}^{4} n (A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} n \left(A_i \cap A_j \right) \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} n \left(A_i \cap A_j \cap A_k \right) - n\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i \right) \end{aligned}$$

وبوجه عام لحساب عدد عناصر الحدث وقوع واحد على الأقل من الأحداث $A_1, A_2, \dots , A_m$ أي لحساب $n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right)$ نوجد أولاً جميع التقاطعات الممكنة لأحداث من $A_1, A_2, \dots , A_m$ ونحسب عدد عناصر كل منها ، وبعد ذلك نضيف عدد عناصر التقاطعات التي تتكون من عدد فردى من الأحداث ونطرح منها عدد عناصر التقاطعات التي تتكون من عدد زوجي من الأحداث أي أن

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n(A_i) - \sum_{1\le i<j\le m} n(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le m} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{m+1}\, n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)$$

وتعرف هذه العلاقة بقاعدة التضمين والاستثناء **inclusion – exclusion principle** .

والآن نفرض $1 \le i \le m$, A_i أحداث من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما .
إذن عدد عناصر الحدث عدم وقوع A_i لكل $1 \le i \le m$ يكون

$$n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i'\right) = n\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)'\right)$$
$$= n(S) - n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء نحسب $n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$ وبالتالي نحصل على $n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i'\right)$.

مثـــال ٣٢ :

نفرض $1 \le k \le 4 \quad \forall \quad A_k$ أحداث من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما بحيث أن

$$n(S) = 2^5 \quad , \quad n(A_k) = k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$
$$n(A_i \cap A_j) = n(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$
$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = n(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_1)$$

أوجد عدد عناصر الحدث عدم وقوع A_k لكل $1 \le k \le 4$.

الحـــل :

المطلوب هو $n\left(\bigcap_{k=1}^{4} A_k'\right)$ وحيث أن

$$n(A_k) = k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$

إذن

$$n(A_1)=1 \quad , \quad n(A_2)=2 \quad , \quad n(A_3)=6 \quad , \quad n(A_4)=24$$

وحيث أن

$$n(A_i \cap A_j) = n(A_i) \qquad \forall \ 1 \le i < j \le 4$$

إذن

$$n(A_1 \cap A_2)=1 \ , \ n(A_1 \cap A_3)=1 \ , \ n(A_1 \cap A_4)=1$$
$$n(A_2 \cap A_3)=2 \ , \ n(A_2 \cap A_4)=2 \ , \ n(A_3 \cap A_4)=6$$

وحيث أن

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = n(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

إذن

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=1 \qquad , \qquad n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)=1 \ ,$$
$$n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)=1 \qquad , \qquad n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)=2 \ ,$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_1) = 1$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء فإن

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - n\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$= (1+2+6+24) - (1+1+1+2+2+6) + (1+1+1+2) - 1$$
$$= 24$$

إذن

$$n\left(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k\right) = n(S) - n\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)$$
$$= 2^5 - 24$$
$$= 8$$

مثـــال ٣٣ :

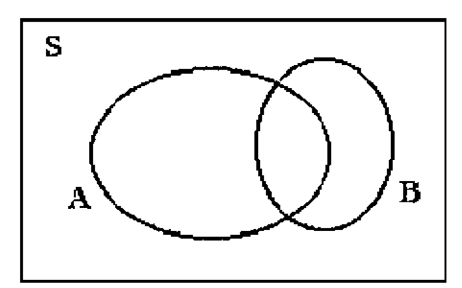
نفرض الحدثان B , A من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم كون شكل فـــــن لكل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن يقع A ولا يقع B أي أن A فقط هو الذى يقع .

٢ – الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما ، أي وقوع أحد الحدثان فقط .

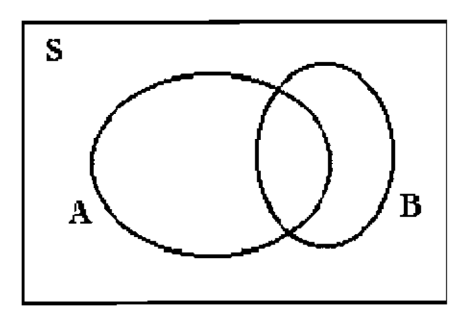
الحـــل :

– ١



حيث أن الحدث A يقع بينما الحدث B لا يقع ، إذن نظلل الجزء من A الموجود خارج B كما موضح بشكل فن ، وحيث أن عدم وقوعB يعنى وقوع المكملة B' إذن الحدث أن يقع A ولا يقع B هو الحدث وقوع A , B' معاً ، أي انه الحدث $A \cap B'$.

– ٢



حيث أن الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما يكافئ الحدث وقوع A بينما B لا يقـــع أو وقوع B بينما A لا يقع كما يوضحه الجزء المظلل في شكل فن . وحيث أن وقـــوع A بينما B لا يقع هو الحدث $A \cap B'$ ووقوع B بينما A لا يقع هو الحدث $A' \cap B$ إذن الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما هو الحدث $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

مثـــال ٣٤ :

نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم كون شـكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث وقوع A فقط .

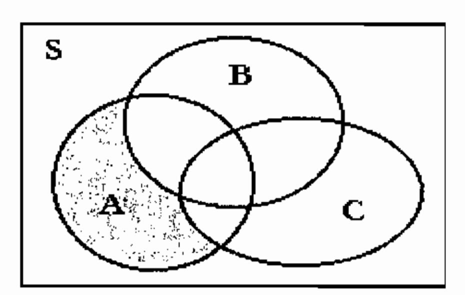
٢ - الحدث وقوع A و B و C معاً .

٣ - الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C .

٤ - الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C .

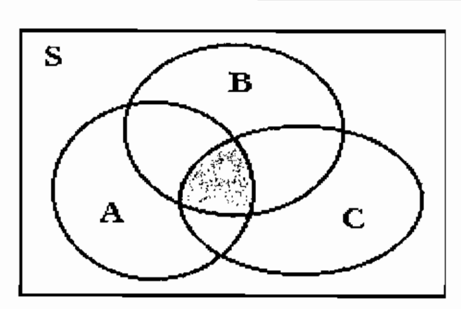
الحـــل :

١ - الحدث وقوع A فقط



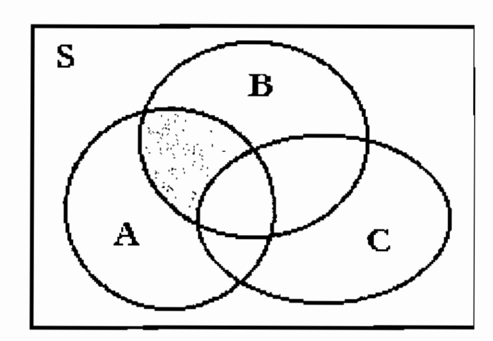
حيث أن وقوع الحدث A فقط يعنى وقوع A مع عدم وقوع B أو C أي انه وقوع A مع عدم وقوع $B \cup C$ وهذا يعنى وقوع A ووقوع $(B \cup C)'$ ولذلك نظلل الجـــزء من A الموجود خارج $B \cup C$ وهذا يُمثله $A \cap (B \cup C)'$ كما موضح بشكل فن ومن قانون ديمورجان $(B \cup C)' = B' \cap C'$ وبالتالي فإن الحدث وقوع A فقـــط هو $A \cap B' \cap C'$.

٢ - الحدث وقوع A و B و C معاً



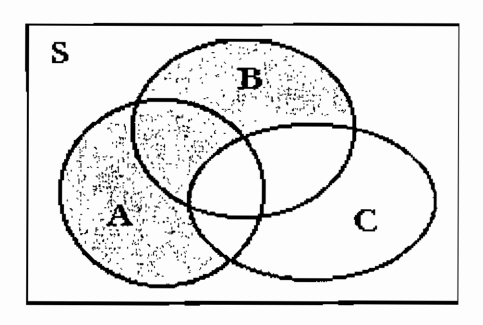
نظلل الجزء المشترك بين A , B , C فيكون هو الحدث $A \cap B \cap C$ موضع الدراسة .

٣ – الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C .



حيث أن وقوع الحدث A و B وعدم وقوع C يعنى وقوع $A \cap B$ وعدم وقوع C أى وقوع $A \cap B$ ووقوع C' لذلك نظلل الجزء من $A \cap B$ الموجود خارج C كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C هو $A \cap B \cap C'$.

٤ – الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C .



حيث أن وقوع الحدث A أو B وعدم وقوع C يعنى وقوع $A \cup B$ وعدم وقوع C وهذا يعنى وقوع $A \cup B$ ووقوع C' لذلك نظلل الجزء من $A \cup B$ الموجود خارج C كما موضح بشكل فن ، وبالتالي الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C هو $(A \cup B) \cap C'$.

مثـــال ٣٥ :

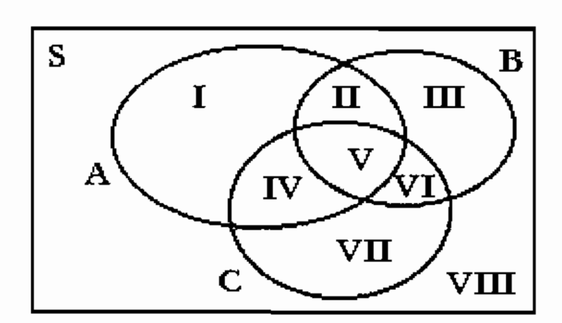
نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكـــل من الأحداث الآتية :

1 - $(A \cap B) \cup (C - A)$

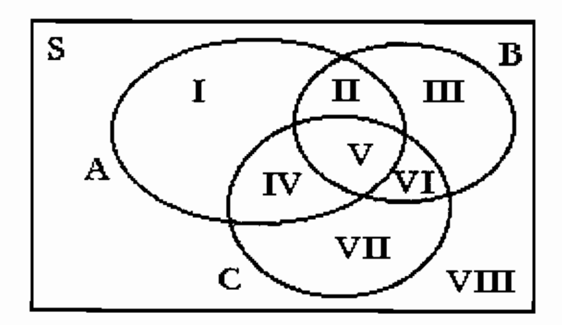
2 - $(A \cap B \cap C') \cup (B \cap C \cap A')$

الحــــل :

١ – نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثله المناطق V , II ثم نقوم بتظليل $C - A$ ويمثله المناطق VI , VII وبالتالي فإن الحدث $(A \cap B) \cup (C - A)$ يمثله المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل .



٢ – نقوم بتظليل $(A \cap B \cap C')$ ويمثله المنطقة II ثم نقوم بتظليل $(B \cap C \cap A')$ ويمثله المنطقة VI وبالتالي فإن الحدث $(A \cap B \cap C') \cup (B \cap C \cap A')$ يمثله المناطق II , VI المظللة بالشكل .



مثـــال ٣٦:

نفرض الأحداث $A\ ,B\ ,C$ من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عـــن كـــل مـــن الأحداث الآتية بصورة مبسطة :

1- $(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B')$

2- $(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup(B'\cup C'))$

الحـــل :

$$1-(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B')=((A\cap A')\cup B)\cap(A\cup B')$$
$$=(\Phi\cup B)\cap(A\cup B') = B\cap(A\cup B')$$
$$=(B\cap A)\cup(B\cap B') = (B\cap A)\cup\Phi$$
$$= B\cap A$$

$$2-(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup(B'\cup C'))$$
$$=(A\cup(B\cap C))\cap(A\cup(B'\cup C'))$$
$$=(A\cup(B\cap C))\cap(A\cup(B\cap C)')$$
$$=(A\cup((B\cap C)\cap(B\cap C)'))$$
$$= A\cup\Phi$$
$$= A$$

مثـــال ٣٧:

للأحداث $A\ ,B\ ,C$ من فضاء العينة S وضح أياً من العبارات الآتية صواب وأيهما خطأ

1- $(A-A\cap B)\cup B=A\cup B$

2- $(A'\cup B)'\cap C=A\cap(B\cup C)'$

الحـــل :

$$1-\quad (A-A\cap B)\cup B=(A\cap(A\cap B)')\cup B$$
$$=(A\cap(A'\cup B'))\cup B=(A\cap A')\cup(A\cap B')\cup B$$
$$=\Phi\cup(A\cap B')\cup B=(A\cap B')\cup B$$
$$=(A\cup B)\cap(B'\cup B)=(A\cup B)\cap S$$
$$=A\cup B$$

إذن العبارة تكون صحيحة .

$$2-\quad (A'\cup B)'\cap C=(A''\cap B')\cap C$$
$$=(A\cap B')\cap C = A\cap(B'\cap C)$$
$$= A\cap(B\cup C')' \neq A\cap(B\cup C)'$$

إذن العبارة تكون خطأ .

مثـــال ٣٨:

في مجموعة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرســـون الرياضيـــات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرســـون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغـــة الإنجليزيـــة ، 7 طـــلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرسون اللغـــة الإنجليزية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم كون شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

(١) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

(٢) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

(٣) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والفيزياء ولا يدرس اللغة الإنجليزية .

(٤) – الحدث أن الطالب لا يدرس أياً من المقررات الثلاثة .

(٥) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

(٦) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

(٧) – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

الحـــل :

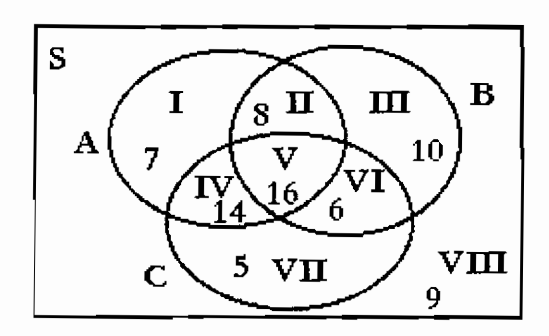
نفرض الحدث A اختيار طالب يدرس مقرر الرياضيات ،

الحدث B اختيار طالب يدرس مقرر الفيزياء ،

الحدث C اختيار طالب يدرس مقرر اللغة الإنجليزية .

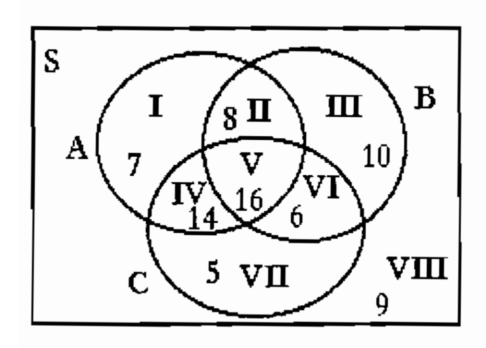
الأحداث الثلاثة A , B , C يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن ومن المفضل أن نبـــدأ مـــع البيانات الأكثر وضوحا والتي يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتُمثل الأساس الذى ننطلق منه لإكمال باقي البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هـــي الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاثة وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقـــاطع الأحداث الثلاثة $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 في المنطقـــة V وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $A \cap B$ في المنطقتين II ,V وعددهم 24 وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل ، إذن يتبقى 8 طلاب وبالتـــالى

نضع العدد 8 في المنطقة II وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $A \cap C$ في المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل ، إذن نضع العدد 14 في المنطقة IV وبالمثل نضع العدد 6 في المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية ، وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فانهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب في المنطقة III التي تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب في المنطقة VII التي تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط ، ومجموع الأعداد الموجودة في شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب في المجموعة يساوى 75 إذن يتبقى 9 طلاب في المنطقة VIII وبالتالي نحصل على شكل فن الموضح .



والآن بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها

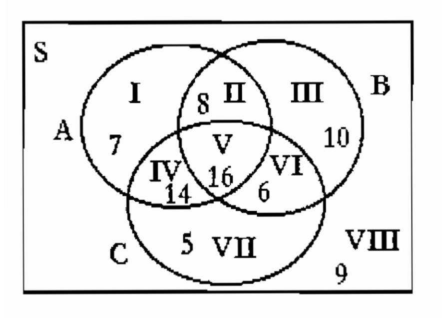
(١) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .



الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات هو الحدث A ويمثله المناطق المظللة I , II , IV , V كما موضح بشكل فن ، وعدد عناصره هو

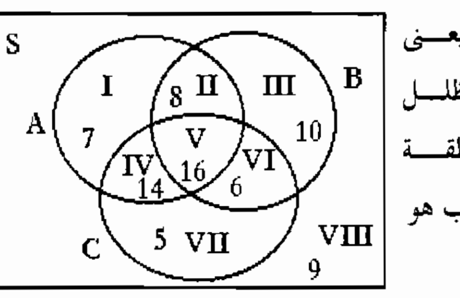
$$7 + 8 + 14 + 16 = 45$$

(٢) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .



وقوع الحدث A فقط يعنى عدم وقوع B أو C أي عدم وقوع $B \cup C$ لذلك نظلل الجزء من A الموجود خارج $B \cup C$ وهو المنطقة I كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $A \cap B' \cap C'$ وعدد عناصره يساوى 7 .

(٣) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والفيزياء ولا يدرس اللغة الإنجليزية .

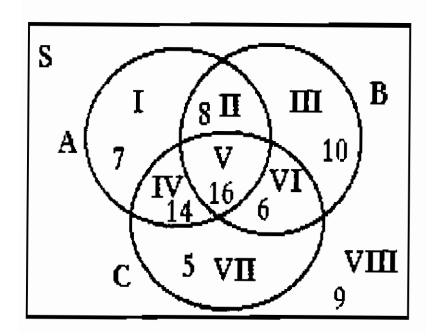


وقوع الحدث A و B وعدم وقوع C يعنى وقوع $A \cap B$ وعدم وقوع C لذلك نظلل الجزء من $A \cap B$ الموجود خارج C وهو المنطقة II كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $A \cap B \cap C'$ وعدد عناصره يساوى 8 .

(٤) – الحدث أن الطالب لا يدرس أياً من المقررات الثلاثة .

الحدث هو عدم وقوع أياً من A , B , C لذلك نظلل الجزء الموجود خارج $A \cup B \cup C$ وهو المنطقة VIII كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $(A \cup B \cup C)'$ وعدد عناصره يساوى 9 .

(٥) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

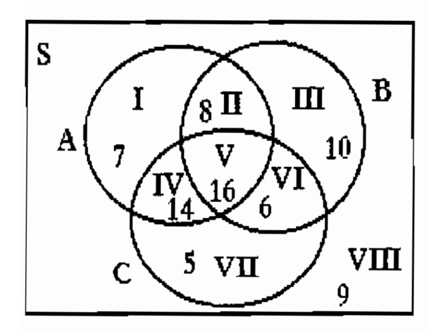


الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط يمثله المناطق المظللة II , IV , VI كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث هو

$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (B \cap C \cap A')$$

وعدد عناصره هو $8 + 14 + 6 = 28$

(٦) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

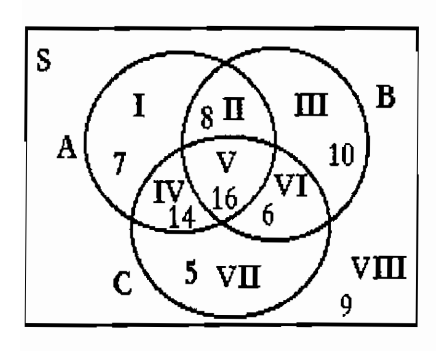


الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل يمثله المناطق المظللة II , IV , V , VI كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث هو

$$(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C \cap A')$$

وعدد عناصره هو $8 + 14 + 16 + 6 = 44$

(٧) – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .



الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر يمثله المناطق المظللة I , III ,VII ,VIII كما موضح بشكل فن وهو مكملة الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل . إذن الحدث المطلوب هو

$$((A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C \cap A'))'$$

وعدد عناصره هو $75 - 44 = 31$

مثـــال ٣٩ :

في مجموعة من 120 طالب بكلية التربية وجد أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحـــدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزيـــة ، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 42 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 20 طالب يدرســـون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 25 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانيـــة ، 15 طـــالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم كون شكل فن للحدث أن الطالب يدرس اللغات الثلاثة وأوجد عدد عناصره . كذلك أوجد عدد عناصر الأحداث المختلفة في شكل فن .

الحـــل :

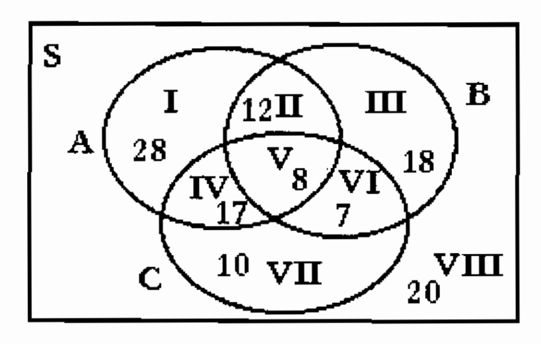
نفرض أن الحدث A اختيار طالب يدرس الإنجليزية ، الحدث B اختيـــار طـــالب يـــدرس الفرنسية ، الحدث C اختيار طالب يدرس الألمانية . وحيث أن 100 طالب يدرسون علـــى الأقل واحدة من اللغات الثلاث إذن $n(A \cup B \cup C) = 100$ وبالتعويض في القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

إذن

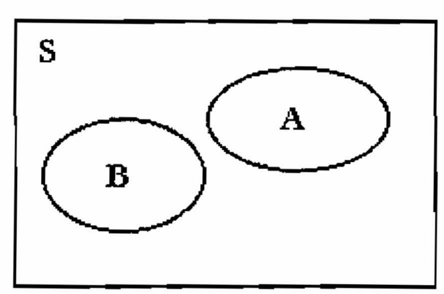
$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالي $n(A \cap B \cap C) = 8$ إذن الحدث أن الطالب يدرس الثلاث لغـــات هـــو $A \cap B \cap C$ وعدد عناصره 8 . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنـــا بالمثال السابق ، وبالتالى عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضـــح بالشكل الآتى :



تعريف ١٢ : الأحداث المتنافية

يقال أن الحدثان A , B متنافيان أو مانعان لبعضهما البعض إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الآخر ، أي أن $A \cap B = \Phi$ وهذا يعنى أن الحدثان لا يمكن أن يقعا معاً .



شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث الحدثان A , B متنافيان .

وبوجه عام : الأحداث $A_1, A_2, \dots , A_n$ تسمى أحداث متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى أي إذا كان

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall \ i \neq j \in \{1,2, \dots ,n\}$$

ويمكن أن يمتد هذا التعريف إلى عدد لا نهائي قابل للعد من الأحداث $A_1, A_2, \dots$ فتسمى أحداث متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى أي إذا كان

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall \ i \neq j \in \{1,2, \dots \}$$

وكأمثلة على الأحداث المتنافية :

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن فضاء العينة $S = \{H,T\}$ وإذا كان الحدث A هو ظهور وجه الصورة $A=\{H\}$ والحدث B هو ظهور وجه الكتابة $B=\{T\}$ فإن الحدثان A , B حدثان متنافيان .

– في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كان الحدث A هو ظهور عدد أقل من 4 والحدث B هو ظهور عدد اكبر من 3 ، أي أن $A=\{1,2,3\} , B=\{4,5,6\}$ إذن الحدثان A , B حدثان متنافيان .

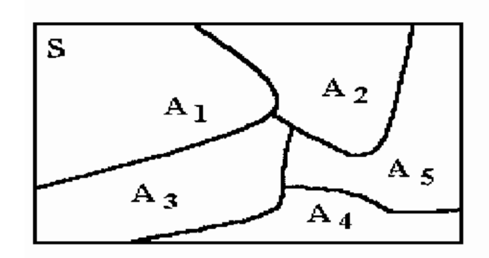
تعريف ١٣ : تجزئ فضاء العينة

مجموعة الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تسمى تجزيئاً لفضاء العينة S إذا كان

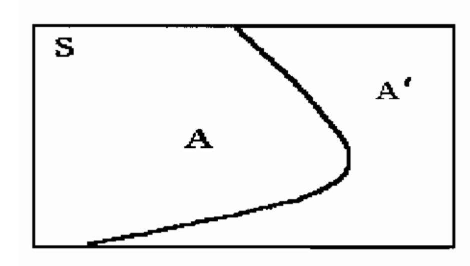
١ – الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متنافية ، أي أن

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall \; i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

٢ – الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكون فضاء العينة S أي أن $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$



في الشكل الموضح نلاحظ أن الأحداث A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 تُكوّن تجزي لفضاء العينة S فهي أحداث متنافية مثنى مثنى واتحادها معا يعطى فضاء العينة S.



ولأي حدث A من فضاء العينة S فإن الحدث A مع مكملته A' يكونان تجزي لفضاء العينة S حيث

$$A \cap A' = \Phi \qquad , \qquad S = A \cup A'$$

مثال ٤٠ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي اكتب فضاء العينة S للتجربة وكوّن مجموعة من أربعة أحداث توضح بها مفهوم التجزيء لفضاء العينة .

الحل : بفرض أن H ترمز إلى صورة ، T ترمز إلى كتابة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

نفرض الحدث A_1 ظهور الصورة مع عدد زوجي والحدث A_2 ظهور الصورة مع عدد فردى والحدث A_3 ظهور الكتابة مع عدد زوجي والحدث A_4 ظهور الكتابة مع عدد فردى

$$A_1 = \{H2, H4, H6\} \qquad , \qquad A_2 = \{H1, H3, H5\}$$
$$A_3 = \{T2, T4, T6\} \qquad , \qquad A_4 = \{T1, T3, T5\}$$

إذن الأحداث A_1, A_2, A_3, A_4 متنافية وتُكوّن تجزي لفضاء العينة S .

مثـــال ٤١ :

أكتب من عندك ثلاثة أحداث متنافية وبحيث تكون تجزئ لفضاء العينة في كل من التجـــــارب العشوائية الآتية :

١ – تجربة تسجيل نوع وترتيب الأطفال في العائلات التي لديها ثلاثة أطفال .

٢ – تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع .

٣ – تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " .

٤ – تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد .

٥ – تجربة اختيار نقطة عشوائياً على أو داخل سطح الأســـطوانة $x^2 + y^2 = 16$ والمحدودة بالمستويات $z=1 , z = 9$.

الحـــل :

١ – في تجربة تسجيل نوع الأطفال في العائلات التي لديها ثلاثة أطفال بفـــرض أن الرمـــز b يعنى ولداً والرمز g يعنى بنتاً فإنه مع مراعاة الترتيب في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

نفرض أن الحدث A_1 يعنى أن الأطفال الثلاثة من نفس النوع والحدث A_2 يعنى وجود بنتـاً واحدة في العائلة والحدث A_3 يعنى وجود ولداً واحداً في العائلة ، إذن

$$A_1 = \{ bbb , ggg \} , \quad A_2 = \{ bbg , bgb , gbb \} \quad , A_3 = \{ bgg , gbg, ggb \}$$

نلاحظ أن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وحيث أن $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ إذن الأحداث الثلاثة تُكوّن تجزئ لفضاء العينة S .

٢ – في تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية فإن فضاء العينة S يمكن تعريفـــه بالصورة $S = \{ x : x \geq 0 \}$ حيث x عدد حقيقي غير سالب يمثل الزمـــن مقـاس بالساعات وكسورها من دقائق وثواني . نفرض الحدث A_1 أن يكون المصبـــاح الكـــهربائي صالح لمدة 200 ساعة على الأقل والحدث A_2 أن يكون صالح لمدة 100 ساعة على الأكـثر والحدث A_3 أن يكون صالح لمدة اكبر من 100 ساعة واقل من 200 ساعة ، إذن

$$A_1 = \{ x : x \geq 200 \} \quad , A_2 = \{ x : x \leq 100 \} \quad , A_3 = \{ x : 100 < x < 200 \}$$

إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة S .

٣ – في تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " وعددهم 52 ورقة نفرض الحدث A_1 أن تكون الورقة المسحوبة صورة والحدث A_2 أن تكون الورقة المسحوبة تحمل عدد زوجي والحدث A_3 أن تكون الورقة المسحوبة تحمل عدد فردى ، إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة .

٤ – في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد نفرض النقطتان $c,d \in]a,b[$ بحيث أن $a<c<d<b$ ونفرض الأحداث

$$A_1 = \{ x : a \le x < c \} = [a , c[$$
$$A_2 = \{ x : c \le x < d \} = [c , d[$$
$$A_3 = \{ x : d \le x \le b \} = [d , b]$$

إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة $S=[a,b]$.

٥ – في تجربة اختيار نقطة عشوائياً على أو داخل سطح الأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمحدودة بالمستويات $z=1$, $z = 9$ فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 1 \le z \le 9 \}$$

نفرض الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 كالآتي :

$$A_1 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 1 \le z < 3 \}$$
$$A_2 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 3 \le z < 6 \}$$
$$A_3 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 6 \le z \le 9 \}$$

نلاحظ أن مجسم الاسطوانة تم تجزيئه إلى ثلاث مجسمات كل منها يمثل حدث والأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى واتحادها يعطى مجسم الاسطوانة بالكامل ، إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 تُمثل تجزئ لفضاء العينة S .

الفصل
1

تمارين

١ – أكتب فضاء العينة موضحا عدد عناصره في كل من التجارب العشوائية الآتية :

١ – إلقاء عملة معدنية ثم حجر نرد على الترتيب .

٢ – إلقاء حجر نرد ثم عملة معدنية على الترتيب .

٣ – إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات على التوالي .

٤ – إلقاء ثلاث عملات معدنية متماثلة في آن واحد .

٥ – إلقاء عملة معدنية أربعة مرات متتالية .

٦ – إلقاء حجري نرد متميزين .

٧ – إلقاء حجري نرد متماثلين .

٨ – وضع ثلاثة كتب مختلفة على أحد الرفوف .

٩ – ترتيب ثلاثة أشخاص للجلوس على ثلاثة مقاعد في صف .

١٠ – ترتيب الأرقام 1 , 2 , 3 , 4 للحصول على عدد من أربعة خانات .

٢ – يراد عمل دراسة على العائلات من حيث عدد الأطفال لديها ومع مراعاة الترتيب في الولادة أكتب فضاء العينة في كل من الحالات الآتية :

١ – للعائلات التي لديها طفل واحد فقط .

٢ – للعائلات التي لديها طفلان .

٣ – للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال .

٤ – للعائلات التي لديها أربعة أطفال .

٥ – للعائلات التي لديها طفل واحد أو طفلان .

٦ – للعائلات التي لديها ثلاث اطفال على الأقل .

٣ – في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٢ – الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .

٣ – الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

٤ – الحدث A_4 ظهور الصورة في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور الصورة على الإطلاق .

٤ – في تجربة إلقاء حجر النرد مرتين على التوالي ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور العدد 5 في الرمية الثانية .

٢ – الحدث A_2 مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 .

٣ – الحدث A_3 مجموع العددين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

٤ – الحدث A_4 ظهور عدد في الرمية الأولى اكبر من الذى يظهر في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور العدد 6 في الرميتين .

٥ – للعائلات التي لديها طفلان ومع مراعاة ترتيب الولادة ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 يعنى عدم وجود بنت للعائلة .

٢ – الحدث A_2 يعنى وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٣ – الحدث A_3 يعنى وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٤ – الحدث A_4 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة .

٥ – الحدث A_5 يعنى أن المولود الثاني ولد .

٦ – للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال ومع مراعاة الترتيب في الـــولادة ، أوجـــد كـــل مـــن الأحداث الآتية :

١–وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .

٢–وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٣– عدم وجود بنت في العائلة .

٤– المولود الثاني ولد .

٧ – عرف فضاء عينة مناسب لتجربة اختيار مجموعتين مختلفتين عشوائيا من مجموعة القـــوى $\rho(A)$ في حالة $A=\{1,2\}$ ثم في حالة $A=\{a,b,c\}$ وفي كلتا الحالتين أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – اختيار مجموعتين تقاطعهما المجموعة الخالية .

٢ – اختيار مجموعتين كل منهما مكملة للأخرى .

٣ – اختيار مجموعتين أحدهم تحوى عناصر اكثر من الأخرى .

٤ – اختيار مجموعتين اتحادهم يعطى المجموعة A .

٨ – عرف فضاء عينة مناســب لتجربة سحب ثلاث قطع نقود معاً من كيس يحتــوى علــى عدد 4 قطع نقود من فئة 50 قرش ، 3 قطع نقود من فئة 25 قرش ، 2 قطعة مـــن فئة 20 قرش ، 5 قطعة من فئة 10 قروش وقطعة واحدة من فئة 5 قروش ثم وضــح كل من الأحداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 70 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 70 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 60 قرش وأقل من 150 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 50 قرش على الأكثر .

٥ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 100 قرش على الأقل .

٩– سحبت 4 كروت عشوائياً على التوالي وبدون إرجاع من مجموعة تتكـــون مـــن 18 كارت ملون بها 5 كروت حمراء ، 5 كروت سوداء ، 3 كروت بيضاء ، 5 كـــروت خضراء ، عرف فضاء عينة مناسب للتجربة وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – الكروت الثلاثة المسحوبة من اللون الأزرق .

٢ – الكروت الثلاثة المسحوبة من اللون الأبيض .

٣ – الكروت الثلاثة المسحوبة من نفس اللون .

٤– الكروت الثلاثة المسحوبة تحمل الألوان الثلاثة في علم جمهورية مصر العربية .

٥ – الكروت الثلاثة المسحوبة من ألوان مختلفة .

١٠- صندوق يحتوى على 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20 والكرات السبعة الأولى في الترقيم بيضاء والكرات الثمانية التالية في الترقيم حمراء والكرات المتبقية في الترقيم سوداء :

١ – عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرة واحدة من الصندوق وأوصف الأحداث A , B , C حيث A سحب كرة بيضاء ، B سحب كرة حمراء ، C سحب كرة سوداء .

٢ – عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرتين واحدة بعد الأخرى من الصندوق مع إرجاع الكرة المسحوبة أولا قبل سحب الكرة الثانية وأوصف الأحداث D , E , F حيث D هو الحدث أن الكرة المسحوبة أولا حمراء ، E هو الحدث أن الكرة المسحوبة ثانيا سوداء ، F هو الحدث أن الكرتان بيضاء .

٣ – عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرتين واحدة بعد الأخرى من الصندوق بدون إرجاع وأوصف الأحداث D , E , F المشار اليها في المطلوب ٢ .

١١- مخزن للأجهزة الكهربائية به 60 جهاز تليفزيون TV ، 40 جهاز راديو ، أراد أمين المخزن التحقق من صلاحية الأجهزة ومعرفة ما إذا كانت تعمل أو لا تعمل . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – جميع الأجهزة تعمل .

٢ – لا يوجد أى جهاز راديو صالح للعمل .

٣ – أول خمسة أجهزة تليفزيون فحصهم كانت لا تعمل بينما باقى الاجهزة تعمل .

١٢- بائع جرائد يبدأ يومياً عمله ومعه 75 جريدة ، عرف فضاء عينة مناسب لتجربة معرفة عدد الجرائد التي يبيعها في يومين متتاليين وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – يبيع 10 جرائد على الأقل في اليوم الأول .

٢ – يبيع 9 جرائد على الأقل في اليوم الثاني .

٣ – يبيع 8 جرائد على الأقل في كل من اليومين .

٤- عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول .

٥- مجموع ما تم بيعه في اليومين أقل من 80 جريدة .

١٣– نفرض تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 600 ساعة على الأقل .

٢ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 1200 ساعة على الأكثر .

٣ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 850 ساعة بالضبط .

٤ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة تتراوح بين 800 ، 1100 ساعة .

٥ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون غير صالحة على الإطلاق .

١٤– مكالمة تليفونية من شخص ما يتم الانتظار لاستقبالها بين الساعة 7:00 والساعة 7:30 صباحا من كل يوم . أكتب فضاء عينة مناسب لتجربة تسجيل وقت المكالمة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – وصول المكالمة خلال ربع ساعة بعد السابعة .

٢ – وصول المكالمة في مدة لا تزيد عن خمس دقائق بعد السابعة والربع .

٣ – فترة الانتظار اقل من 10 دقائق .

٤ – فترة الانتظار أكبر من 10 دقائق .

٥ – فترة الانتظار أكبر من 5 دقائق واقل من ربع ساعة .

١٥– حافلة للركاب تتسع لعدد 28 راكب ، تتوقف الحافلة في محطة ما بين الساعة السابعة 7:00 والساعة الثامنة 8:00 صباحا من كل يوم . نفرض التجربة العشوائية التي تتكون من رصد عدد الركاب الموجود في الحافلة وقياس وقت وصول الحافلة إلى هذه المحطة . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 24 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:45 .

٢– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 .

٣– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب.

٤ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 23 راكب .

٥ – الحافلة تصل إلى المحطة ما بين الساعة 7:25 والساعة 7:45 .

١٦- سيارة أجرة تتبع أحد شركات السياحة تحمل الركاب من مطار القاهرة الدولي إلى ثلاثة فنادق مختلفة تتعامل معها شركة السياحة ، فإذا علمت أن السيارة غادرت المطار وبها عدد 2 من السائحين . أكتب فضاء عينة مناسب لوصف نزولهم في الفنادق الثلاثة ثم اكتب عناصر الحدث أن السائحين ينزلان في نفس الفندق .أجب عما سبق إذا غادرت السيارة المطار وبها ثلاثة من السياح.

١٧- أوصف فضاء عينة مناسب في كل من التجارب العشوائية الآتية :

١ - إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الكتابة لأول مرة .

٢ - إلقاء حجر نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقم 6 لأول مرة.

٣ - إلقاء حجري نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقمين متساويين على الوجهين .

٤ - اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد .

٥ - اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة في المستوى مركزها النقطة (a,b) ونصف قطرها r .

٦ - اختيار نقطة عشوائيا داخل المستطيل المحدود بالمستقيمات $x=\pm 5$, $y=\pm 4$.

٧ - اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح كرة في الفراغ مركزها (a,b,c) ونصف قطرها r .

٨ - اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح مكعب في الفراغ محدود بالمستويات $x=\pm 2 , y=\pm 2 , z=\pm 2$.

٩ - اختيار نقطة عشوائيا داخل سطح الاسطوانة $x^2 + z^2 = 9$ ومحدودة بالمستويات $y=1$, $y = 4$.

١٨- كون الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة من الأولاد والبنات في عائلة لديها أربعة أطفال . وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١-وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .

٢-وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٣- وجود ولدان في العائلة .

٤- المولود الرابع ولد .

١٩– يراد عمل دراسة على العائلات التي لديها طفلان أو ثلاثة أطفال ومع مراعاة الأسبقية في الولادة ، أرسم الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١– العائلات التي طفلها الأكبر ولد .
٢– العائلات التي طفلها الأصغر بنت .
٣ – العائلات التي لديها بنتان وولد.
٤ – العائلات التي لها الأولاد أكثر من البنات.
٥ – العائلات التي لها البنات أكثر من الأولاد .
٦ – العائلات التي لديها بنت .
٧ – العائلات التي لديها ولد .
٨ – العائلات التي ليس لديها أولاد .
٩ – العائلات التي لديها بنتان .
١٠– العائلات التي لديها ولدان .

٢٠– ألقيت عملة معدنية لملاحظة ظهور وجه الصورة أو وجه الكتابة ، فإذا ظهر وجه العملة الصورة يتم إلقاء حجر نرد بينما إذا ظهر وجه الكتابة يتم إلقاء العملة المعدنية مرة ثانية .
أرسم الشجرة البيانية للتجربة وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – ظهور عدد زوجي .
٢ – ظهور صورة واحدة على الأقل .
٣ – عدم ظهور صورة .
٤ – ظهور صورة واحدة على الأكثر .

٢١– في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التى تمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة .

٢٢ – يلعب فريقان مباراة ما ويعتبر الفريق فائزا إذا فاز في شوطين على التوالي أو أربعة أشواط في كل المباراة ، كون الشجرة البيانية لجميع الطرق التي يمكن أن تتم بها المباراة.

٢٣ – في مباراة لكرة السلة من ثلاثة أشواط بين فريقين ، يفوز بالمباراة الفريق الذي يكسب شوطين من أشواط المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع نواتج المباراة .

٢٤ – في مباراة للشطرنج chess بين لاعبين يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة .

٢٥- كيس يحتوى على أربعة قطع نقود اثنتان عاديتان واثنتان ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من الثلاث قطع المتبقية بالكيس ثم تلقى . ارسم شجرة بيانية للتجربة وأكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – ظهور صورة مرة واحدة على الأكثر .

٢ – ظهور الصورة مرتين .

٢٦- كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى فإذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة . ارسم شجرة بيانية للتجربة واكتب فضاء العينة ثم أكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – ظهور عدد زوجي .

٢ – ظهور صورة على الأقل .

٢٧- في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول الآتي :

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز	غرفتين	الطابق الأول
جناح جيد	ثلاث غرف	الطابق الثاني
جناح متوسط		الطابق الثالث

ارسم شجرة بيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة واكتب فضاء العينة ثم أكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

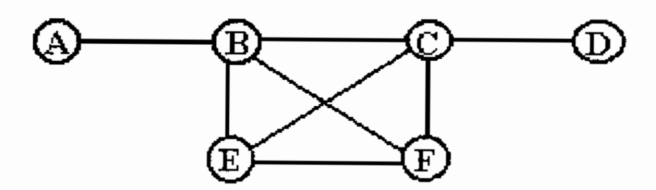
١ – حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث .

٢ – حجز جناح من ثلاث غرف بالطابق الأول .

٣ – حجز جناح متوسط .

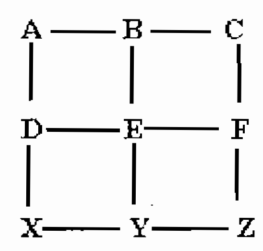
٤ – حجز جناح من غرفتين .

٢٨- النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تـــدل

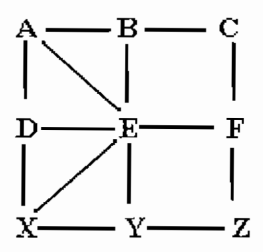


على جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخـــرى واعتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتـين . أوجد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن قبل أن يتوقف للاستراحة . وإذا كان يوجـد طريق مباشر بين المدينتين A , F فأوجد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن في هـذه الحالة قبل أن يتوقف للاستراحة .

٢٩- في الرسم الآتي تسعة نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بـدأ رجـل في التحرك من النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأسية أو خطوة أفقية



ويتوقف عن الحركة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قـد مر بها من قبل . أوجد عدد الطرق التي يمكنه أن يتجول بها إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D . وإذا كان يوجد طريق بين X , E وطريق بين A , E كمـا موضـح



بالرسم فأوجد عدد الطرق التي يمكنه أن يتجول بها في هذه الحالة إذا كانت الخطـوة الأولى من X إلى E .

٣٠- يوجد ثلاثة أشخاص بمحطة مترو وعند وصول قطار مترو من ثلاث عربات صعد الأشخاص الثلاثة إلى القطار . ارسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة لصعود الأشخاص الثلاثة إلى عربات القطار ، ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث صعود الأشخاص الثلاثة في عربتين على الأكثر .

٢ - الحدث صعود الأشخاص الثلاثة في عربتين فقط .

٣١- في اختبار بنظام الاختيار من متعدد بحيث أن لكل سؤال ثلاثة اختيارات منها إجابة واحدة فقط صواب فإذا كان الاختبار يتكون من ثلاثة أسئلة ، أرسم الشجرة البيانية التي توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ومن ذلك استنتج كل من الأحداث الآتية :

١ - الإجابة تكون صواب عن سؤالين .

٢ - الإجابة تكون صواب عن سؤالين على الأكثر .

٣ - الإجابة تكون خطأ عن سؤالين على الأكثر .

٤ - عدد الإجابات الصواب تكون اكثر من عدد الإجابات الخطأ .

٥ - الإجابة تكون صواب عن الأسئلة جميعها .

٣٢- في أحد محطات القطارات المزدحمة يتم اختيار سيارات الأجرة التي تحمل الركاب وفقا لترتيب وصولها إلى المحطة ، نفرض الحدث A وجود 6 سيارات على الأقل تنتظر دورها لتأخذ الركاب ، الحدث B وجود 4 سيارات على الأكثر والحدث C يوجد 3 سيارات بالضبط . عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٣٣- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط فإذا كان الحدث A هو ظهور عدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 والحدث C هو ظهور عدد يقبل القسمة على 3 عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٣٤- لأي حدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية وباستخدام طريقـــة انتمـــاء العنصر اثبت صحة كل مما يأتي :

$$1-\quad A - B = A \cap B'$$
$$2-\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$3-\quad A \cap (B \cup A) = A$$

٣٥- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية وباستخدام طريقة انتماء العنصر اثبت صحة كل مما يأتي :

$$1-\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$2-\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$3-\quad A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$$
$$4-\quad (A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$$

٣٦- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح معنى كل من العلاقات الآتية :

$$1-\quad A \cup B \cup C = B$$
$$2-\quad A \cap B \cap C = C$$

٣٧- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن كل من الأحداث الآتية بصورة مبسطة

$$1-\quad (A \cup B') \cap (A \cup B) \cap C$$
$$2-\quad (A \cup B') \cap (A \cup C') \cap (A \cup C)$$
$$3-\quad A' \cap (A \cup C) \cap (A' \cap B)$$
$$4-\quad (A - A \cap B) \cup (A \cup B)'$$
$$5-\quad (A \cup B - A \cap B) - ((A' \cup B)' \cup (A' \cap B))$$

٣٨- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح أي مـــن العبارات الآتية صواب وأيها خطأ .

$$1-\quad (A - A \cap B) \cup B = A \cup B$$
$$2-\quad (A \cup B)' \cap C = A' \cap (B \cup C')'$$
$$3-\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup B \cup C$$

٣٩- نفرض الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم ارسم شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - أن يقع A أو لا يقع B .   ٢ - أن يقع A أو B وليس كلاهما .

٤٠- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم ارسم شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث وقوع B فقط .

٢ - الحدث وقوع A و C معا وعدم وقوع B .

٣ - الحدث عدم وقوع A و B أو وقوع C .

٤ - الحدث عدم وقوع A أو B ووقوع C .

٤١- نفرض الأحداث A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

1- $A' \cap B$ 3- $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

2- $(A \cup B')'$ 4- $(A' \cup B') \cap (B' - A)$

٤٢- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

1- $(A \cup B) \cap (C - A)$ 3- $(A \cap B' \cup C) \cup (B \cap C \cap A')$

2- $(A \cap B) \cup (C \cap A')$ 4- $(A' \cap B') \cap (B' \cap C' \cap A)$

٤٣- في مجموعة من 250 طالب بالكلية وجد أن 230 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية، الفرنسية ، الألمانية ووجد أن 135 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 86 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 54 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 30 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 35 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية ، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن للحدث أن الطالب يدرس الثلاث لغات وأوجد عدد عناصره . كذلك أوجد عدد عناصر الأحداث المختلفة في شكل فن .

٤٤– في مجموعة تتكون من 100 طالب وجد أن 20 طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات والعلوم ، 29 طالب يدرسون الرياضيات والعلوم ، 35 طالب يدرسون الرياضيات واللغة العربية ، 26 طالب يدرسون العلوم واللغة العربية ، 8 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 12 طالب يدرسون العلوم فقط ، 22 طالب يدرسون اللغة العربية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

٢ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

٣ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والعلوم ولا يدرس اللغة العربية .

٤ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات ولا يدرس العلوم .

٥ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

٦ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

٧ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأكثر .

٨ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأقل .

٩ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

١٠ – الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

٤٥– في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يلعبونها فإذا كان 62 طالب يلعبون كرة القدم ، 53 يلعبون كرة السلة ، 65 يلعبون العاب القوى ، 19 يلعبون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يلعبون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يلعبون أياً من الألعاب الثلاث . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الطالب يلعب كرة القدم فقط .

٢ – الطالب يلعب لعبة واحدة فقط .

٣ – الطالب لا يلعب كرة السلة .

٤ – الطالب يلعب لعبتين فقط .

٥ – الطالب يلعب لعبتين على الأقل.

٦ – الطالب يلعب لعبتين على الأكثر.

٤٦- في تجربة إلقـــاء حجر نرد مرة واحدة ، إذا كان الحدث A هو ظهور عدد أقل من 5 والحدث B هو ظهور عدد اكبر من 3 ، هل الحدثان A , B حدثان متنافيان ؟

٤٧- في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي اكتب فضاء عينة مناسب للتجربـــة وحدد مجموعة من أربعة أحداث توضح بها مفهوم التجزيء لفضاء العينة .

٤٨- في تجربـــة اختيـــار عـــدداً عشـــوائياً مـــــن مجموعـــة الأعـــداد الطبيعيـــة {1,2,3, ... , 500} فإذا كان الحدث A هو اختيار عدد زوجي والحدث B هـو اختيار عدد فردى والحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث D هـو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 والحدث E هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 . اكتب عناصر كل من الأحداث A , B , C , D , E ووضح أيـــاً منـــها يكـــون أحداث متنافية وأياً منها يُكوّن تجزئ لفضاء العينة .

٤٩- للعائلات التي لديها أربعة أطفال و مع مراعاة الترتيب في الولادة ، اكتب مـــن عنـــدك بعض الأحداث المتنافية وأكتب ثلاثة أمثلة مختلفة لأحداث تُمثل تجزئ لفضاء العينة .

٥٠- أكتب حدثان متنافيان ويكونان تجزئ لفضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية :

١ – إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الصـــورة لأول مرة .

٢ – إلقاء حجر نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقم6 لأول مرة.

٣ – اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة .

٤ – اختيار نقطة عشوائيا داخل المستطيل المحدود بالمستقيمات $x=\pm 5$, $y=\pm 4$.

٥ – اختيار نقطة عشوائيا داخـــل ســـطح الاســـطوانة $x^2 + z^2 = 9$ ومحـــدودة بالمستويات $y=1$, $y = 5$.

الفصل
2

طرق العـــد
Counting Methods

من الأمور الهامة في دراستنا للاحتمالات هي تحديد فضاء العينة S للتجربة العشـــوائية الـــتي نكون بصددها ومعرفة عدد العناصر في فضاء العينة وكذلك معرفة عدد العناصر في الأحـــداث المختلفة التي نتعامل معها في التجربة العشوائية . وفى هذا الفصل نقدم مراجعة على نظريـــات الترتيب والتباديل والتوافيق لنتعرف على بعض الطرق والقواعد التي تساعدنا في العد وبالتـــالي في تحديد عدد العناصر في مجموعة معينة بدون الحاجة إلى العد المباشر وهذه الطرق تسمى أحيانا بالتحليل التوافقي **Combinatorial Analysis** ومن هذه الطرق والقواعـــد نســـتطيع بالتالي تحديد عدد عناصر فضاء العينة وكذلك معرفة عدد العنـــاصر في الأحـــداث المختلفـــة للتجربة العشوائية .

١ - قاعدة الضرب Multiplication Rule

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n من الطرق ، ومع كل طريقة من هذه الطرق كانت التجربة E_2 تحدث في m من الطرق فإن التجربتان تحدثان معاً في $m \times n$ من الطرق .

مثـــال ١ :

في أحد المعاهد العلمية أراد طالب أن يسجـــل في مقررين أحدهما في الرياضيات والآخـــر في الكومبيوتر ، فإذا كان مطروحا أربعة مقررات في الرياضيـــات وثلاثة مقررات في الكومبيوتـــر فأوجد عدد الطرق التي يتمكن الطالب من التسجيل فيها .

الحل :

الطالب لديه 4 اختيارات في مقررات الرياضيـــات ومع كـــل اختيـــار يكـــون لديـــه 3 اختيـــارات في مقررات الكومبيوتـــر وبتطبيق قاعدة الضرب يكون ما لديه من اختيارات هـــو 4×3 أي 12 اختيار .

ويمكن تعميم قاعدة الضرب لتشمل k من التجارب كالآتي :

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n_1 من الطرق ولكل واحدة من هـــذه الطـــرق كـــانت التجربة E_2 تحدث في n_2 من الطرق ولكل واحدة من هذه الطرق كانت التجربة E_3 تحدث في n_3 من الطرق ... وهكذا حتى التجربة E_k التي تحدث في n_k من الطـــرق فإن التجـــارب $E_1 , E_2 , \ldots , E_k$ تحـــدث معـــاً بعـــدد مـــن الطـــرق يســـاوى $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ ومن ذلك يمكن استنتاج القاعدة الأساسية للعد .

القاعدة الأساسية للعد:

> إذا أمكن إجراء عملية ما بعدد n_1 من الطرق المختلفة وإذا تلـــت هـــذه العملية عملية ثانية يمكن إجراؤها بعدد n_2 من الطرق المختلفة وإذا تلـــت هذه العملية عملية ثالثة يمكن إجراؤها بعدد n_3 مـــن الطـــرق المختلفـــة ، وهكذا فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء هذه العمليات معاً بالترتيب المذكـور هو حاصل الضرب $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$.

مثـــال ٢ :

كم خط تليفون يمكن تركيبه في مدينة ما إذا تألف رقم التليفون من سبعة أرقام أولها فردي ؟

الحل :

حيث أن الرقم الأول فردى أي إنه ينتمي في المجموعة { 1,3,5,7,9 } فإن عدد طرق كتابـة الرقم الأول يكون 5 أما الأرقـــام الســـتة الأخـــرى فكـــل منـــها ينتمـــي في المجموعـــة { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 } وبالتالي فإن عدد طرق كتابة كل منها يكون 10 طرق

5	10	10	10	10	10	10

وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد خطوط التليفونات التى يمكن تركيبها في المدينة هو

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5000000$$

مثـــال ٣ :

إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربيـــة يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً .

١ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات .

٢ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى تبدأ بالحرف ب .

الحل :

١ – حيث أن عدد الحروف الأبجدية العربية يساوى 28 حرف وحيث أن اللوحـــة المعدنيـــة للسيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربية ، إذن يمكن كتابـــة الحـــرف الأبجدي الأول بعدد 28 طريقة مختلفة والحرف الثاني بعدد 27 طريقة مختلفة ، وحيـــث انـــه يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً . إذن يتم اختيار الرقم الأول بتسع طرق مختلفة وكل من الأرقام الثلاثة الأخرى يتم اختيارها بعشرة طرق مختلفة

مواضع الأرقـــام العدديـــة				مواضع الحروف الأبجدية	
10	10	10	9	27	28

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات هو

$$28 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 6804000$$

٢– حيث أن اللوحة المعدنية تبدأ بالحرف ب إذن يمكن كتابة الحرف الأبجدي الأول بطريقـــة واحدة والحرف الثاني بعدد 27 طريقة مختلفة ، وحيث انه يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكـــون الرقم الأول صفراً ، إذن يتم اختيار الأرقام كما سبق

مواضع الأرقـــام العدديـــة				مواضع الحروف الأبجدية	
10	10	10	9	27	1

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات هو

$$1 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 243000$$

مثـــال ٤ :

امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice يحتوى على 10 أســـئلة ولكـــل سؤال أربع إجابات منها واحدة فقط صحيحة . أحد الطلاب لم يكن مستعد للامتحان وأجـاب على كل أسئلة الامتحان بالتخمين

١ – بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢ – بكم طريقة تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان ؟

٣ – بكم طريقة يوفق الطالب في الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة ؟

الحل :

١ – حيث أن عدد أسئلة الامتحان 10 وحيث أن لكل سؤال أربع إجابات منها واحدة فقـط صحيحة ، إذن يمكن الإجابة على السؤال الأول بطرق عددها 4 وبالمثل يمكن الإجابة علـى السؤال الثاني بطرق عددها 4 وهكذا حتى السؤال العاشر يمكن الإجابة عليه بطرق عددها 4 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة على الامتحان يكون

$$4^{10} = 1048576$$

٢ – تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان إذا اختار الطالب إجابته علـــى كـــل سؤال من الاختيارات الثلاث الخطأ ، أي انه يستبعد دائما الاختيار الصواب وبالتـــالي يمكـــن الإجابة خطأ على السؤال الأول بطرق عددها 3 وبالمثل يمكن الإجابة على السؤال الثاني خطأ بطرق عددها 3 وهكذا حتى السؤال العاشر يمكن الإجابة عليه خطـــأ بطـــرق عددهـــا 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة خطأ في جميع الأسئلة يكون

$$3^{10} = 59049$$

٣ – يوفق الطالب في الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة إذا اختار الإجابـــة الصـــواب في خمسة أسئلة وعدد طرق اختيار الإجابة صواب في كل منها هو طريقة واحدة فقط والأســـئلة الخمسة الباقية يتم الإجابة على كل منها خطأ بطرق عددها 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة يكون

$$3^5 = 243$$

٣ - قاعدة الجمع Addition Rule

إذا كانت تجربتان مانعتان لبعضهما البعض ، أي أن حدوث إحداهما يلغي حدوث الأخرى ، وكانت التجربة الأولى تحدث في n من الطرق ، وكانت التجربة الثانية تحدث في m من الطرق فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث ف $m + n$ من الطرق .

ويمكن تعميم قاعدة الجمع لتشمل k من التجارب كالآتي :

> إذا كان هناك k من التجارب بحيث لا يحدث أي أثنين منها في نفس الوقت وكان عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة الأولى n_1 وعدد الطرق التي تحدث فيها التجربة الثانية n_2 وهكذا حتى التجربة رقم k فإن عدد الطرق التي تحدث فيها واحدة من هذه التجارب يكون $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

مثال ٥ :

إذا كان لدى الطالب فرصة في تسجيل مقرر واحد فقط من بين ثلاثة مقررات في الرياضيات وأربعة مقررات في الكومبيوتر ومقررين في الفيزياء ، فأذكر عدد الاختيارات التي لدى الطالب للتسجيل في مقرر واحد .

الحل :

الطالب لديه 3 اختيارات في مقررات الرياضيات

و لديه 4 اختيارات في مقررات الكومبيوتر

و لديه 2 اختيار في مقررات الفيزياء

وحيث أن الطالب لديه فرصة في تسجيل مقرر واحد فقط . إذن بتطبيق قاعدة الجمع فإن عدد الاختيارات التي لدى الطالب للتسجيل في مقرر واحد يكون

$$3 + 4 + 2 = 9$$

٣ - التباديل Permutations

تبديل عدد من الأشياء يعنى وضع أو تنظيم هذه الأشياء في ترتيب معين ، فإذا كـــان لدينا n من الأشياء وتم وضعهم جميعاً في ترتيب معين فإن هذا يسمى تبديل n من الأشياء مأخوذة جميعها كل مرة أما إذا أخذنا فقط أي عدد r من هذه الأشياء (حيث $r \leq n$) وتم وضعها في ترتيب معين فإن هذا يسمى تبديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مـرة ، وسوف يرمز لعدد التباديل من n من الأشياء المأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$.

وبفرض مجموعة الحروف a , b , c , d فإننا نلاحظ أن :

- abcd , bcad , dacb هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة جميعها كل مـرة
- bcd , cad , dab هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة ثلاثة حروف كل مرة
- bc , ad , db هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة اثنان كل مرة

مثـال ٦ :

بكم طريقة يمكن ترتيب الحروف a , b , c معاً .

الحل :

نفرض أن الحروف الثلاثة تمثل بثلاثة مربعات

في المربع الأول من جهة اليسار يمكن وضع الحرف الأول بثلاث طرق مختلفة (a أو b أو c) وبعد ذلك في المربع الثاني يمكن وضع الحرف الثاني بطريقتين وهـذا يعتمد على الحرف الـذي سيوضع بالمربع الأول فإذا وضع بالمربع الأول الحرف a يتبقى للمربع الثاني إمـا b أو c وفى حالة إذا وضع بالمربع الأول الحرف b يتبقى للمربع الثاني إما a أو c وهكذا في حالة إذا وضع بالمربع الأول الحرف c يتبقى للمربع الثاني إما a أو b وبعد ذلـك في المربـع الثالث يمكن وضع الحرف الثالث بطريقة واحدة فقط ، وبالتالي يمكن كتابة عدد طرق اختيـار الحرف في المربع الذي يمثل هذا الحرف كما يلي

3	2	1

ومن القاعدة الأساسية للعد يكون عدد طرق ترتيب الحروف الثلاثة (عدد تباديل الحـروف الثلاثة مأخوذة معاً) يساوى $3 \times 2 \times 1 = 6$ ويمكن تمثيل التباديل الستة السابقة بشـكل الشجرة البيانية كما موضح بالشكل

	b —— c	⟶	abc
a	c —— b	⟶	acb
Start — b	a —— c	⟶	bac
	c —— a	⟶	bca
c	a —— b	⟶	cab
	b —— a	⟶	cba

والآن نحاول الإجابة على السؤال الآتي :

ما هو عدد تباديل n من عناصر مميزة مأخوذة معاً ؟ أي ما هو $_nP_n$ ؟

وبمعنى آخر

إذا كان لدينا n من عناصر مميزة فما هو عدد طرق ترتيبها كلها معاً في خط ؟

وللإجابة على هذا التساؤل نفرض n من الأماكن كما بالشكل

المكان الأول	المكان الثاني	...	المكان n
↑	↑		↑
n	(n – 1)		1

وحيث أن العناصر جميعها مميزة ، إذن يتم مراعاة الترتيب وبالتالي فإنه يكون لدينا n من الاختيارات لنملأ المكان الأول وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الأول يتبقى لدينا عدد (n – 1) من الاختيارات لنملأ المكان الثاني ، وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الثاني يتبقى لدينا عدد (n – 2) من الاختيارات لنملأ المكان الثالث ، وهكذا حتى يبقى لدينا اختيار واحد لملء آخر مكان وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد تباديل n من العناصر المميزة مأخوذة معاً يساوى $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ وعادة يستخدم الرمز !n ويقرأ " مضروب n " ليدل على حاصل الضرب السابق ، وبالتالي

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

نظرية ١ : عدد تباديل n من العناصر المميزة المأخوذة معاً ، وبمعنى آخر عدد طرق ترتيب n من العناصر المميزة المأخوذة معاً هو

$${}_nP_n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times3\times2\times1$$

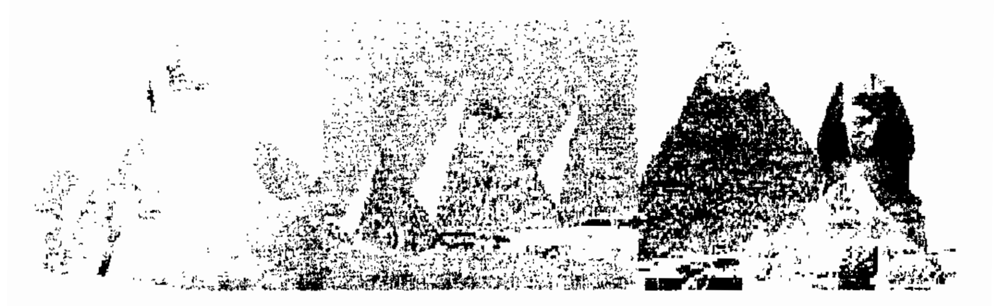
فمثلاً ، عدد طرق ترتيب الحروف الأربعة a , b , c , d معاً يكون

$${}_4P_4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$

وذلك لإن الحروف الأربعة مختلفة (مميزة) .

مثـــال ٧ :

مجموعة من 3 صور فوتوغرافية مختلفة لمنطقة الأهرامات بالجيزة . بكم طريقة يمكن ترتيبهم ؟



الحل :

حيث أن الصور مختلفة ، إذن عدد طرق ترتيبهم هو $\;{}_3P_3 = 3! = 3\times2\times1 = 6$.

والآن نحاول الإجابة على السؤال الآتي :

ما هو عدد تباديل n من عناصر مميزة مأخوذة r في كل مرة ؟ أي ما هو ${}_nP_r$ ؟

وبمعنى آخر ، ما هو عدد طرق اختيار r عنصر من n من العناصر المميزة ؟

وللإجابة على هذا التساؤل نفرض r من الأماكن كما بالشكل

المكان r	...	المكان الثاني	المكان الأول
↑		↑	↑
$(n-r+1)$		$(n-1)$	n

حيث أن العناصر جميعها مميزة ، إذن يتم مراعاة الترتيب وبالتالي فإنه يكون لدينـــا n مـــن الاختيارات لنملأ المكان الأول وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الأول يتبقى لدينا $(n-1)$ من الاختيـــارات لنملأ المكان الثاني ، وبعد اخذ عنصر وتخصيصه للمكان الثاني يتبقى لدينـــا $(n-2)$ من الاختيارات لنملأ المكان الثالث ، وهكذا حتى يتبقى لدينا $(n - r + 1)$

من الاختيارات لملئ المكان الأخير رقم r وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عـــدد طـــرق اختيار r من العناصر من n من العناصر المميزة يساوى

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

وباستخدام الرمز ${}_nP_r$ ليدل على عدد تباديل n من العناصر المميزة تؤخذ r في كل مرة فإن

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

وبالضرب في $\dfrac{(n-r)!}{(n-r)!}$ فإن

$${}_nP_r = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبذلك نصل إلى النظرية الآتية:

نظرية ٢ : عدد تباديل n من العناصر المميزة المأخوذة r في كل مرة هو

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظة هامة : عند حساب عدد التباديل يتم مراعاة الترتيب

مثـــال ٨ :

بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين أخذا من الحروف a, b, c, d, e .

الحل : حيث أن عدد الحروف 5 وهى مختلفة (مميزة) ونريد ترتيبها مأخوذة 2 فى كل مرة .

إذن عدد الطرق يكون

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times (3!)}{(3!)} = 20$$

مثـــال ٩ :

نفرض مجموعة الأرقام الفردية $\{1,3,5,7,9\}$ وبفرض عدم السماح بالتكرار احسب :

١ – كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٢ – كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام قيمته اقل من 600 يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٣ – كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام قيمته تكون مضاعف للعدد 5 ؟

الحل : عدد الأرقام الفردية في المجموعة المعطاة يساوى 5 وغير مسموح بالتكرار

١ – الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام ويمكن تكوينها من هذه المجموعة عددها يساوى

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

٢ – لكي يكون العدد الذي يتم تكوينه ، من المجموعة المعطاة ، مكونا من ثلاثة أرقام وقيمتـه أقل من 600 فإن خانة المئات مسموح أن يوضع فيها الرقم 1 أو الرقم 3 أو الرقم 5 ، أي أن خانة المئات مسموح أن تملأ بطرق عددها 3 ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار فإنه بعد حجـز رقم لخانة المئات يتبقى أربعة أرقام وبالتالي فإن خانة العشـرات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانـة الآحاد تملأ بطرق عددها 3 وبذلك يوجد $3\times4\times3 = 36$ عدداً مختلفاً قيمته أقل من 600 .

٣ – لكي يكون العدد الذي يتم تكوينه من المجموعة المعطاة مكوناً من ثلاثة أرقـام وقيمتـه تكون مضاعف للعدد 5 فإن رقم الآحاد يجب أن يقبل القسمة على 5 وبالتـالي يجـب أن يكون 5 أي أن خانة الآحاد تملأ بطريقة واحدة فقط ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار فـإن خانة المئات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة العشرات تملأ بطرق عددهـا 3 وبذلـك يوجـد $4\times3\times1 = 12$ عدداً مختلفاً قيمته مضاعف للعدد 5 .

مثـال ١٠:

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أولاد وبنتان في صف به خمسة مقاعد إذا كان

١ – الجلوس بدون أي قيود ؟

٢ – يجلس الأولاد معاً والبنتان معاً ؟

٣ – تجلس البنتان معاً ؟

الحل :

١ – عدد طرق جلوس خمسة أشخاص على خمسة مقاعد بدون أي قيود يكون $5!=120$.

٢ – يوجد طريقتان لجلوس الأولاد معاً وجلوس البنات معاً وهما **ggbbb , bbbgg**

حيث الرمز b يعنى ولد والرمز g يعنى بنت وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا بطـرق عددها $3!$ ويمكن للبنتين أن تجلسا معاً بطرق عددها $2!$ ، إذن وفقاً لقاعدة الضرب فـإن عدد الطرق في كل حالة يكون $3!\times2! = 12$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عـدد الطرق الكلية يكون $12 + 12 = 24$.

٣ – يوجد أربع طرق لجلوس البنتين معاً وهما **ggbbb , bggbb , bbggb , bbbgg**

وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا بطرق عددها $3!$ ويمكن للبنتين أن تجلسا معاً بطـرق عددها $2!$.إذن وفقاً لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكـون $3!\times2! = 12$ وبجمع الحالات الأربعة وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون 48 .

مثـال ١١ :

خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة بحيث يجلس الرجال متجاورين وتجلس النساء متجاورات . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

الحل :

لتحقيق المطلوب يمكن للرجال أن يشغلوا المقاعد الخمسة الأولى أو المقاعد الخمسة الأخيرة وفى كل حالة تشغل النساء المقاعد الخمسة الأخرى وذلك على النحو التالي :

الحالة	مقاعد النساء					مقاعد الرجال				
الأولى	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

الحالة	مقاعد الرجال					مقاعد النساء				
الثانية	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

في كل حالة فإن عدد الطرق التي يشغل بها الرجال مقاعدهم يساوى $5! = 120$ وعدد الطرق التي تشغل بها النساء مقاعدها يساوى $5! = 120$. إذن وفقاً لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكون $5! \times 5! = 14400$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية الممكنة يساوى $14400 + 14400 = 28800$.

مثـال ١٢ :

خمسة طلاب بالفرقة الثالثة وخمسة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة في قاعة امتحان بحيث لا يجلس طالبان متجاوران ومن نفس الفرقة . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

الحل :

نفرض أن المقاعد العشرة مرقمة من 1 إلى 10 ولتحقيق المطلوب يمكن لطلاب الفرقة الثالثة أن يشغلوا المقاعد ذات الأرقام الفردية وطلاب الفرقة الرابعة يشغلوا المقاعد ذات الأرقام الزوجية أو العكس وذلك على النحو التالي :

الحالة الأولى	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

الحالة الثانية	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

وفي كل حالة فإن عدد الطرق التى يشغل بها طلاب الفرقة الثالثة مقاعدهم $5!$ وعدد الطرق التي يشغل بها طلاب الفرقة الرابعة مقاعدهم $5!$. إذن وفقاً لقاعدة الضرب فـــإن عـــدد الطرق في كل حالة يكون $5!\times5! = 14400$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عـــدد الطرق الكلية الممكنة يساوى $14400 + 14400 = 28800$.

نظريـــة ٣:

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة حول دائرة يساوي $(n-1)!$

مثـــال ١٣:

بكم طريقة يمكن لمجموعة من خمسة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون

(أ) – في صف به خمسة مقاعد ؟ (ب) – حول مائدة مستديرة ؟

الحل :

(أ) – يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسون في صف بطرق عددها

$$5\times4\times3\times2\times1 = 5! = 120$$

(ب) – يمكن لشخص واحد أن يجلس في أي مكان من المائدة المستديرة وبعد ذلك يمكن للأشخاص الأربعة الأخرين أن يرتبوا أنفسهم حول المائدة بطرق عددها

$$(5-1)! = 4! = 24$$

٤ - التوافيق Combinations

في كثير من الحالات نحتاج إلى اختيار عدداً معيناً من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى ترتيب العناصر ، والطرق التي يتم بها مثل هذا الاختيار تسمى توافيق ، وعندما تعرفنا على التباديل أكدنا على ضرورة مراعاة الترتيب ولكن في التوافيق لا يتم مراعاة الترتيب وبالتالي يمكننا القول أن التوافيق هي الطرق التي نختار بها عدداً معيناً من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب . والمثال الآتي يوضح الفرق الأساسي بين التباديل والتوافيق حتى لا يحدث أي التباس أو غموض بين المفهومين .

مثال ١٤ :

عدد الطرق الممكنة لاختيار رئيس ووكيل لمجلس إدارة أحد الأندية الرياضية من بين أربعة أشخاص a , b , c , d يساوى $_4P_2 = \frac{4\,!}{(4-2)\,!} = 12$ وهنا استخدمنا التباديل لأنه لابد من مراعاة الترتيب فالاختيار (a, b) يعنى انه تم اختيار الشخص a رئيساً لمجلس الإدارة واختيار الشخص b وكيلاً لمجلس الإدارة وهذا بالتأكيد يختلف تماماً عن الاختيار (b , a) الذي يعنى انه تم اختيار الشخص b رئيساً لمجلس الإدارة واختيار الشخص a وكيلاً لمجلس الإدارة . أما إذا أردنا تعيين عدد الطرق الممكنة لاختيار شخصين من الأشخاص الأربعة فإن الوضع هنا يختلف تماماً حيث أن الاختيار (a, b) لا يختلف عن الاختيار (b , a) فالترتيب هنا غير مهم ويكون عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة يساوى 6 وهى (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,c) , (b,d) , (c,d) وتعرف بتوافيق 4 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة ويرمز لذلك $_4C_2$ ونلاحظ أن

$$_4C_2 = \frac{_4P_2}{2!} = \frac{4\times3}{2} = 6$$

إذن التباديل يتم فيها مراعاة الترتيب بينما التوافيق يهمل فيها الترتيب .

نظرية ٤ : عدد توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة ، وبمعنى آخر ، عدد طرق اختيار r من العناصر من بين n من العناصر دون مراعاة الترتيب يرمز له $_nC_r$ ويعرف بالصورة

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وكثيراً ما يستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ ويقرأ " n فوق r " بدلاً من الرمز ${}_nC_r$ للتعبير عن توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة . أي أن

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث n , r أعداد صحيحة موجبة بحيث يكون $r \le n$ ومن التعريف يمكن استنتاج أن

$$\binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r} \;, \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

وباستخدام توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة يمكن حساب المفكوك الجبري لمقدار مثل $(x+y)^n$ وهذا يعتبر من التطبيقات الهامة للتوافيق ، ولذلك فإن التوافيق $\binom{n}{r}$ تسمى أيضاً بمعاملات ذات الحدين وذلك تبعاً للنظرية الآتية :

<u>نظرية ٥ : (مفكوك ذات الحدين Binomial Expansion)</u>

لأي عدد صحيح $n \ge 0$ فإن

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} \, y^i$$

<u>مثـــال ١٥</u> : أثبت أن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \;\dots\; + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

<u>الحل</u> :

من مفكوك ذات الحدين بوضع $x = y = 1$ نحصل على

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \, 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

إذن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \;\dots\; + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

مثـــال ١٦ :

إذا كان X مجموعة تحتوى على n من العناصر فأوجد عدد المجموعات الجزئية من X .

الحل :

عدد المجموعات الجزئية من المجموعة X والتي تتكون من r عنصر هو $\binom{n}{r}$ حيث $r \le n$

أي أن العدد الكلي للمجموعات الجزئية من المجموعة X يكون

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n$$

إذن عدد المجموعات الجزئية من المجموعة X يساوى 2^n ونلاحظ أن المجموعة الخالية تنـــاظر المجموعة الجزئية التي تتكون من 0 عنصر أي لا يوجد فيها أي عنصر وعدد طـــرق تكوينـــها يكون $\binom{n}{0} = 1$ والمجموعة الشاملة تناظر المجموعة الجزئية التي تتكون من n عنصر أي هي المجموعة X نفسها وعدد طرق تكوينها يكون $\binom{n}{n} = 1$.

مثـــال ١٧ :

في أحد المطاعم وضع إعلان يتيح للزبائن إمكانية الاختيار من تشكيلة من 1000 نوع مـــن البيتزا . فإذا علمت انه بالإضافة إلى المكون الأساسي وهو الجبن يوجد بالمطعم 10 مكـــونات إضافية يمكن الدمج بين أياً منها لعمل مجموعة متنوعة من البيتزا . والسؤال هو ، هـــل هـــذا الإعلان صادق أم هو إعلان كاذب ؟

الحل :

حيث أن أي تركيبة من المكونات العشرة الإضافية يمكن وضعها مع المكون الأساسي للبيـــتزا . إذن عدد الأنواع المختلفة من البيتزا التي يمكن أن يقدمها المطعم يســـاوي عـــدد المجموعـــات الجزئية من مجموعة المكونات العشرة الإضافية ، أي انه يســـاوى $2^{10} = 1024$ ، إذن الإعلان يكون صادق . ونلاحظ أن المجموعة الخالية من مجموعة المكونات العشرة تناظر تقـــديم وجبة بيتزا بالمكون الأساسي فقط وهو الجبن والمجموعة الشاملة تناظر تقديم وجبة بيتزا بـــالمكون الأساسي بالإضافة إلى المكونات العشرة الإضافية .

مثـــال ١٨ :

مجموعة من 40 طالب في أحد المدارس

١ – بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من أربعة طلاب ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من أربعة طلاب بحيث أن أحد الطلاب لابد أن يكون في هذه اللجنة ؟

الحل :

١ – المطلوب هو إيجاد عدد طرق اختيار أربعة طلاب من 40 طالب وواضح أن الترتيب غير مهم أي أن المطلوب هو عدد توافيق 40 من العناصر مأخوذة 4 في كل مرة

$$\binom{40}{4} = \frac{(40!)}{(4!)\times(36!)} = 91390$$

٢ – إذا كان أحد الطلاب لابد أن يكون في هذه اللجنة فإن اختيار باقي أعضاء اللجنة يتـــم باختيار 3 طلاب من 39 ويتم ذلك بطرق عددها

$$\binom{39}{3} = \frac{(39!)}{(3!)\times(36!)} = 9139$$

مثـــال ١٩ :

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من 3 طلاب على الأقل من بين خمسة طلاب ؟

الحل :

المطلوب هو حصر عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من 3 طلاب على الأقل يتم اختيارها مـــن بين خمسة طلاب وهذا يعنى أن اللجنة يمكن أن تكون من 3 طلاب أو 4 طلاب أو 5 طلاب .

عدد طرق تشكيل لجنة من 3 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(3!)\times(2!)} = 10$

عدد طرق تشكيل لجنة من 4 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{4} = \frac{5!}{(4!)\times(1!)} = 5$

عدد طرق تشكيل لجنة من 5 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5!)\times(0!)} = 1$

ووفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من 3 طلاب على الأقل مـــن بـــين الطلاب الخمسة يساوى $10 + 5 + 1 = 16$.

مثـــال ٢٠:

من بين 4 رجال و 5 نساء يراد تكوين لجنة مؤلفة من 3 أشخاص . بكم طريقة يمكن تكويـــن اللجنة في الحالات الآتية :

١ – بـــدون أي قيـــــود في اختيار أعضاء اللجنة .

٢ – اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة .

٣ – اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة .

الحل :

١– إذا تم اختيار اللجنة بدون أي قيود فإن عدد طرق اختيار 3 أشخاص من 9 أشخاص هو

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{(3!)\times(6!)} = 84$$

٢– عدد طرق اختيار رجلين من أربعة رجال هو $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(2!)\times(2!)} = 6$

وعدد طرق اختيار امرأة من خمس نســـاء هو $\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!} = 5$

إذن وفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار رجلين وامرأة واحدة هو

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$$

٣ – في حالة أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجـــال يجـــب أن يكون باللجنة فإن عدد طرق اختيار رجل من ثلاثة رجـــال هو

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!} = 3$$

عدد طرق اختيار امرأة من خمس نســـاء هو

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!} = 5$$

إذن وفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار رجلين وامرأة واحـــدة بشـــرط أن أحد الرجال يجب أن يكون في هذه اللجنة هو

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$$

مثـــال ٢١:

في أحد المدارس من بين 6 معلمين لمادة الرياضيات ، 10 طلاب متفوقين في مادة الرياضيـــات يراد اختيار 3 معلمين ، 4 طلاب متفوقين لتكوين جمعية الرياضيات بالمدرسة .

١ – أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه الجمعية .

٢ – أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه الجمعية إذا كان المـــدرس الأول في مـــادة الرياضيات يجب أن يكون في اللجنة .

٣ – إذا كان يوجد طالبان متخاصمان ولا يرغبان أن يشاركا في اللجنة معاً فبكم طريقة يمكـــن بها تشكيل هذه الجمعية ؟

الحل :

١ – تمثيل المعلمين يتم باختيار 3 معلمين من 6 وتمثيل الطلاب يتم باختيار 4 طلاب مـــن 10 وحيث أن الترتيب في اختيار المعلمين أو الطلاب غير مهم لذلك نستخدم التوافيق ، إذن

عدد طرق اختيار 3 معلمين من 6 معلمين يكون $\binom{6}{3} = \frac{(6!)}{(3!)\times(3!)} = 20$

عدد طرق اختيار 4 طلاب من 10 طلاب يكون $\binom{10}{4} = \frac{(10!)}{(4!)\times(6!)} = 210$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $20\times210 = 4200$.

٢– إذا كان المدرس الأول في مادة الرياضيات يجب أن يكون في اللجنة فإن تمثيل باقي المعلمين يتم باختيار 2 معلمين من 5 بينما تمثيل الطلاب لن يتأثر أي اختيار 4 طلاب من 10 . إذن

عدد طرق اختيار 2 معلمين من 5 معلمين يكون $\binom{5}{2} = \frac{(5!)}{(2!)\times(3!)} = 10$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $10\times210 = 2100$.

٣– حيث انه يوجد طالبان متخاصمان ولا يرغبان أن يشاركا في اللجنة معاً لذلك نســتبعدهم من مجموع الطلاب ليتبقى 8 وعدد طرق اختيار 4 طلاب من 8 يساوى $\binom{8}{4}$ ومع كل مـــن الطالبان المتخاصمان يمكن اختيار 3 من الثمانية المتبقين ويتم ذلك بطرق عددها $\binom{8}{3}$ ووفقـــاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الطلاب يساوى $\binom{8}{4} + \binom{8}{3} + \binom{8}{3} = 182$

وتمثيل المعلمين لن يتأثر وبالتالي فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $20\times182=3640$.

مثـــال ٢٢:

شخص له عشرة أصدقاء من الجنسين ، ويرغب في دعوة خمسة منهم ألي حفل . أوجد عدد الطرق الممكنة لدعوهم في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضرا معاً .

٣ – اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً .

الحل :

١ – عدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من عشرة أصدقاء $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$

٢ – حيث أن اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معاً ، لذلك بـــعد اســـــتبعادهم يتبقى 8 أصدقاء وعدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من الثمانية المتبقين يكون $\binom{8}{5}$ وعنـــد دعوة الاثنان المتزوجان للحضور يتبقى اختيار ثلاثة من الثمانية المتبقين بطرق عددها $\binom{8}{3}$ إذن وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} + \frac{8!}{3! \times 5!} = 56 + 56 = 112$$

٣ – حيث أن اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً ، لذلك بعد اســـتبعادهما يتبقى 8 أصدقاء وعدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من الثمانية المتبقين يكون $\binom{8}{5}$ ومع كـــل شخص من الاثنان المتخاصمان يمكن اختيار أربعة من الثمانية المتبقين بطرق عددهـــا $\binom{8}{4}$ إذن وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{4} + \binom{8}{4} = \frac{8!}{5! \times 3!} + 2 \times \frac{8!}{4! \times 4!} = 196$$

مثـــال ٢٣ :

امتحان لمادة الرياضيات به عشرة أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ثمانية أسئلة فقــط ، أوجد ما يأتى :

١ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

٣ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها إذا كان مـــن الضـــروري أن يجيب عن ثلاثة أسئلة من الأسئلة الأربعة الأولى ؟

٤ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ومطلـــوب مـــن الطـــلاب الإجابة على أربعة أسئلة فقط من كل مجموعة فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٥ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ومطلـــوب مـــن الطـــلاب الإجابة على أربعة أسئلة فقط من كل مجموعة وكان الســـؤال الأول في كـــل مجموعـــة إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

الحل :

١ – عدد طرق اختيار ثمانية أسئلة من عشرة أسئلة هو عدد توافيق 10 من الأسئلة مـأخوذة 8 في كل مرة ونلاحظ هنا أن الترتيب في اختيار الأسئلة غير مهم لذلك استخدمنا التوافيق ، إذن عدد الطرق يكون

$$\binom{10}{8} = \frac{(10!)}{(8!)\times(2!)} = 45$$

٢ – إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية فإنه يتبقى للطالب 7 أسئلة يختار منها 5 وبالتـالي فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو عدد طرق اختيار 5 أسئلة من 7 أسئلة . إذن عدد الطرق يكون

$$\binom{7}{5} = \frac{(7!)}{(5!)\times(2!)} = 21$$

٣- عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها ثلاثة أسئلة من الأسئلة الأربعة الأولى يكون

$$\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$$

وعدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الخمسة أسئلة المتبقية من بين الستة أسئلة المتبقية الأخرى يكون

$$\binom{6}{5} = \frac{(6!)}{(5!)\times(1!)} = 6$$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$4 \times 6 = 24$$

٤- إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ، إذن

عدد طرق اختيار 4 من 5 أسئلة بالمجموعة الأولى يكون $\binom{5}{4} = \frac{(5!)}{(4!)\times(1!)} = 5$

عدد طرق اختيار 4 من 5 أسئلة بالمجموعة الثانية يكون $\binom{5}{4} = \frac{(5!)}{(4!)\times(1!)} = 5$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$5\times5 = 25$$

٥ - إذا كان السؤال الأول في كل مجموعة إجباري ، فإنه يتبقى للطالب في كل مجموعة 4 أسئلة يختار منها 3 ، إذن

عدد طرق اختيار 3 من 4 أسئلة بالمجموعة الأولى يكون $\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$

عدد طرق اختيار 3 من 4 أسئلة بالمجموعة الثانية يكون $\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$

ووفقا للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$4\times4 = 16$$

مثــال ٢٤ :

في أحد الأندية الرياضية يوجد 25 لاعبا مسجلين في فريق كرة القدم منهم 3 لاعبـــين في حراسة المرمى ، 9 لاعبين في خط الدفاع ، 7 لاعبين في خط الوسط ، 6 لاعبين في خـــط الهجوم . بكم طريقة يمكن تشكيل فريق للعب أحد المباريات ويتكون من 11 لاعبـا منـهم واحد لحراسة المرمى وأربعة لخط الدفاع وثلاثة لخط الوسط وثلاثة لخط الهجوم علما بأن كابتن الفريق يلعب في خط الهجوم ولابد من اختياره ضمن الفريق . وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع فكم يكون عدد طرق تشكيل الفريق .

الحل : يتم اختيار الفريق عن طريق

اختيار واحـــد من ثلاثة لحراســة المرمى بطرق عددها $\binom{3}{1}$

واختيار 4 من 9 لاعبين لخط الدفاع بطرق عددها $\binom{9}{4}$

واختيار 3 من 7 لاعبين لخط الوسط بطرق عددها $\binom{7}{3}$

واختيار 3 من 6 لاعبين لخط الهجوم ولكن حيث أن كابتن الفريق يلعب في خط الهجـوم ولابد من اختياره ضمن الفريق ، إذن يتم اختيار 2 من 5 لاعبين فقط لخط الهجوم بطرق عددها $\binom{5}{2}$ ووفقا للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق تشكيل فريق للعب المباراة يكون

$$\binom{3}{1}\times\binom{9}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{5}{2} = \frac{3!}{1!\times 2!}\times\frac{9!}{4!\times 5!}\times\frac{7!}{3!\times 4!}\times\frac{5!}{2!\times 3!}$$

$$= 3\times 126\times 35\times 10 = 132300$$

وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع ولابد من اختياره ضمن الفريق ، إذن يتم اختيــار 3 من 8 لاعبين فقط لخط الدفاع بطرق عددها $\binom{8}{3}$ وبالتالي فإن عدد طرق تشـــكيل الفريق يكون

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{3}\times\binom{7}{3}\times\binom{6}{3} = 3\times 56\times 35\times 20 = 117600$$

مثـــال ٢٥ :

يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم مستقيم منها لا يمر بالنقطة (x_1,y_1) أو (x_2,y_2) ؟

٣ – كم عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط ؟

٤– كم مثلث من هذه المثلثات تحتوى النقطة (x_1,y_1) كرأس فيها ؟

٥ – كم مثلث من هذه المثلثات يكون أحد أضلاعه هو الخـــط الواصـــل بـــين النقطتـــين (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ؟

الحل : حيث أن النقاط عددها n ولا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد وحيـــث أن المستقيم يتحدد بنقطتين ، إذن

١ – عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط يكون هو عدد طرق اختيار نقطتـــين من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{2}$.

٢ – لإيجاد عدد المستقيمات التي لا تمر بالنقطة (x_1,y_1) أو (x_2,y_2) نستبعد النقطتين فيكون لدينا $n - 2$ من النقاط نختار منها نقطتين ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-2}{2}$.

٣ – حيث أن المثلث له ثلاثة رؤوس ، إذن عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط يكـون هو عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{3}$.

٤– لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطة (x_1,y_1) فإننا نحجز هذه النقطة كرأس للمثلث فيتبقى لدينا $n - 1$ من النقاط نختار منها نقطتين كرأسين آخرين للمثلث ويكون ذلـــك بطرق عددها $\binom{n-1}{2}$.

٥ – لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2) كرأسين للمثلـــث فإننا نحجز هاتين النقطتين ، وبالتالي يتبقى $n - 2$ من النقاط نختار منها نقطـــة واحـــدة لتمثل الرأس الثالث ويكون ذلك بطرق عددها $n - 2$.

٥ - التباديل مع التكرار

Distinguishable Permutations

في بعض الأحيان يكون مطلوب معرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر بعضها متمـــاثلا والصيغة العامة لمثل هذا العدد من التباديل نحصل عليه من النظرية الآتية :

نظرية ٦ :

إذا كان ضمن n من العناصر يوجد n_1 من العناصر المتشابهة ، n_2 من العنـــاصر المتشـــابهة والمختلفة عن النوع الأول ، n_3 من العناصر المتشابهة والمختلفة عن النوعين الأولين وهكـــذا إلى n_k من العناصر المتشابهة والمختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقــة فـــإن عـــدد تباديل العناصر التي عددهـــا n (أي أن عدد طرق ترتيب العناصر n) يســـاوي

$$\frac{n!}{(n_1!)\times(n_2!)\times\ \dots\ \times(n_k!)}$$ ويرمز له بالرمز $$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

ويمكن تفسير هذه النظرية على أنها تعطينا عدد الطرق التي يمكننا بها تقسيم مجموعة فيها n من العناصر إلى k من المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها على التوالي $n_1, n_2, \dots, n_k$

بحيث أن $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ فيكون عدد الطرق $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$

مثـــال ٢٦: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الاسم RAAFAT ؟

الحل : عدد الحروف $n = 6$ كالآتي (1R , 3A , 1F , 1T)

إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{6!}{(1!)\times(3!)\times(1!)\times(1!)} = \frac{720}{6} = 120$$

مثـــال ٢٧ :

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف STATISTICS بشرط أن يبدأ كل عنصر في الترتيب بالمقطع STA ؟

الحل : بعد حجز المقطع STA فإن الحروف المتبقية $n = 7$ كالآتي (2T ,2I , 2S ,1 C)

إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{7!}{(2!)\times(2!)\times(2!)\times(1!)} = \frac{5040}{8} = 630$$

مثـــال ٢٨ :

صف دراسي به خمسة عشر طالباً ، بكم طريقة يمكن توزيع ثلاثة نماذج للامتحان على هـــؤلاء الطلاب إذا أخذ كل خمسة طلاب نفس نموذج الامتحان ؟

الحل :

عدد طرق تجزي 15 طالب إلى ثلاث مجموعات بحيث تتكون كل مجموعة من 5 طلاب يكون

$$\frac{(15)!}{(5!)\times(5!)\times(5!)} = 756756$$

ويمكن حل المثال بأسلوب آخر كالآتي :

عدد طرق اختيار 5 طلاب من خمسة عشر طالبا للإجابة على النمـــوذج الأول للامتحـــان يكون

$$\binom{15}{5} = \frac{(15!)}{(5!)\times(10!)} = 3003$$

وعدد طرق اختيار 5 طلاب من الطلاب العشرة المتبقين للإجابة علـــى النمـــوذج الثـــاني للامتحان يكون

$$\binom{10}{5} = \frac{(10!)}{(5!)\times(5!)} = 252$$

وعدد طرق اختيار 5 طلاب من الطلاب الخمسة المتبقين للإجابة علـــى النمـــوذج الثـــالث للامتحان يكون

$$\binom{5}{5} = \frac{(5!)}{(5!)\times(0!)} = 1$$

وهذا واضح لان الطلاب الخمسة المتبقون يكون لهم النموذج الثالث .

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتوزيع ثلاثة نماذج للامتحان على 15 طالب إذا أخذ كل خمسة طلاب نفس نموذج الامتحان يكون

$$3003\times252\times1 = 756756$$

مثـــال ٢٩ :

بكم طريقة يمكن توزيع 7 أشخاص على 3 غرف في فندق حيث أن غرفتين من ذات سريرين وغرفة ذات ثلاث أسِـــرَّة ؟

الحل : عدد الأسِـــرَّة $n = 7$ وحيث أنه يوجد غرفتين من ذات سريرين وغرفة ذات ثلاث أسِـــرَّة ، إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{7!}{(2!)\times(2!)\times(3!)} = 210$$

مثـــال ٣٠ :

بكم طريقة يمكن تقسيم مجموعة من 12 طالب إلى ثلاثة مجموعات متساوية ؟

الحل :

كل مجموعة تحتوى على 4 طلاب

إذن عدد طرق التقسيم

$$\frac{(12)!}{(4!)\times(4!)\times(4!)} = 34650$$

مثـــال ٣١ :

بكم طريقة يمكن تقسيم مجموعة من 12 طالب إلى ثلاثة مجموعات مكونة من 5 , 4 , 3 طلاب ؟

الحل :

عدد طرق التقسيم

$$\frac{(12)!}{(3!)\times(4!)\times(5!)} = 27720$$

مثـــال ٣٢ :

بكم طريقة يمكن ترتيب 3 مصابيح حمراء و 4 مصابيح صفراء و 5 مصابيح زرقاء على واجهة أحد المحلات التجارية ؟

الحل :

عدد المصابيح $n = 12$ كالآتي (3 حمراء ، 4 صفراء ، 5 زرقاء)

إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{(12)!}{(3!)\times(4!)\times(5!)} = 27720$$

٦ - طرق سحب العينات Sampling Methods

تدور الكثير من مسائل التحليل التوافقي وبصفة خاصة في الاحتمالات حول سحب أو اختيار كرة من صندوق به n من الكرات أو سحب ورقة من مجموعة من الأوراق أو اختيار شخص من مجتمع ما ، وعملية اختيار كرة من الصندوق r من المرات تسمى عينة حجمها r ، وسوف ندرس حالتين مختلفتين لسحب العينات :

الحالة الأولى : السحب مع الإرجاع (المعاينة مع الإحلال)

في هذه الحالة يعاد كل عنصر بعد سحبه وقبل سحب العنصر التالي ، وبذلك يظل عدد العناصر n ثابت في كل مرة يتم فيها السحب ، وحيث أنه يوجد n طريقة مختلفة لسحب كل عنصر ، إذن بتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر بحيث يتم الإرجاع في كل مرة هو

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ \dots \ \times n}_{r} = n^r$$

الحالة الثانية : السحب بدون إرجاع (المعاينة بدون إحلال)

في هذه الحالة لا يعاد العنصر المسحوب قبل سحب العنصر التالي وبذلك يتناقص العدد في كل مرة يجري فيها السحب ، وإذا كانت العناصر مميزة فإن عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر (بدون إرجاع) هو ${}_nP_r$ حيث يتم مراعاة الترتيب بينما إذا كانت العناصر غير مميزة فإن عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر (بدون إرجاع) هو $\binom{n}{r}$ حيث لا يراعى الترتيب .

مثال ٣٣ :

في تجربة سحب ورقتان عشوائيا من أوراق اللعب (الكوتشينة) مع الإرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة يكون $52 \times 52 = 2704$ أما إذا كان السحب بدون إرجاع مع مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضاء العينة يكون ${}_{52}P_2 = 2652$ بينما إذا كان السحب بدون إرجاع وبدون مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضاء العينة يكون $\binom{52}{2} = 1326$.

مثـــال ٣٤ : صندوق يحتوى على9 كرات بيضاء ، 6 كرات سوداء ، 5 كـــرات حمـــراء ونريد اختيار مجموعة من الكرات بطريقة عشوائية

١ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء ؟

٣ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث كرات من نفس اللون ؟

٤ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان ؟

الحل :

اختيار أي مجموعة من كرات يعنى أن يتم سحب الكرات معاً بدون إرجـــاع ودون مراعـــاة للترتيب ، وحيث أن عدد الكرات بالصندوق يساوى 20 كرة ، إذن

١ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات بطرق عددها

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{(3!) \times (17!)} = 1140$$

٢ – يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء بطرق عددها

$$\binom{9}{2} \times \binom{6}{1} = 36 \times 6 = 216$$

٣ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون بأن تكون الكرات الثلاث بيضاء ويتم ذلك بطرق عددها $84 = \frac{9!}{(3!) \times (6!)} = \binom{9}{3}$ أو أن تكون الكرات الثلاث سوداء ويتـم ذلك بطرق عددها $20 = \frac{6!}{(3!) \times (3!)} = \binom{6}{3}$ أو أن تكون الكرات الثلاث حمراء ويتـم ذلك بطرق عددها $10 = \frac{5!}{(3!) \times (2!)} = \binom{5}{3}$ ومن قاعدة الجمع فإنه يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بطرق عددها $84+20+10 = 114$.

٤ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بأن نختار كرة من كل لون ويتم ذلـــك بطرق عددها

$$\binom{9}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = 9 \times 6 \times 5 = 270$$

مثـــال ٣٥ : في هذا المثال نوضح عدد عناصر فضاء العينـــة لبعض التجارب العشوائية :

١ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات والسحب مع الإرجاع

فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_1 للتجربة $n(S_1) = (10)^4 = 1000$

٢ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة والسحب بـــــدون الإرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_2 للتجربة

$$n(S_2) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(6!)\times(4!)} = \frac{5040}{24} = 210$$

٣ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات مميزة والسحب بدون إرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_3 للتجربة

$$n(S_3) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{6!} = 5040$$

٤– في تجربة سحب أربعة أوراق من الكوتشينة مع الإحلال ، فإذا أعيدت كـــل ورقـــة إلى الكوتشينة قبل سحب الورقة التالية فيكون سحب كل ورقة بطرق عددها 52 وبذلك فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_4 للتجربة يكون

$$n(S_4) = 52\times52\times52\times52 = (52)^4 = 7311616$$

وكل عنصر يمثل عينة تتكون من 4 أوراق تم سحبها بالإحلال .

٥ – في تجربة سحب أربعة أوراق من الكوتشينة على التوالي وبدون إحلال فإن الورقـــة الأولى يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 52 والورقة الثانية يمكن سحبها بطرق مختلفة عددهـــا 51 والورقة الثالثة يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 50 والورقة الرابعـــة والأخـــيرة يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 49 وبذلك فإن عدد عنـــاصر فضـــاء العينـــــة S_5 للتجربة في هذه الحالة يكون

$$n(S_5) = {}_{52}P_4 = 52\times51\times50\times49 = 6497400$$

وكل عنصر يمثل عينة مرتبة مختلفة تتكون من 4 أوراق تم سحبها بدون إحـــلال مـــع مراعاة الترتيب أما في حالة عدم مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضـــاء العينـــــة S_6 للتجربة في هذه الحالة يكون $n(S_6) = \binom{52}{4} = 270725$.

٦ – في تجربة سحب عينة من أربعة أوراق من الكوتشينة بدون إحلال فإن الحدث أن تكـــون العينة جميعها صور يحدث بطرق عددها

$$_{12}P_4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$$

وذلك لان عدد الأوراق الصور في الكوتشينة يساوى 12 .

٧ – في تجربة تحديد أعياد ميلاد n من الأشخاص وبفرض أن جميع السنوات 365 يومـــا وإذا أخذنا في الاعتبار أن يوم الميلاد لأي شخص منهم يمكن أن يكون أي يوم في الســـنة فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_7 للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S_7) = (365)^n$$

وإذا كانت أيام الميلاد لهؤلاء الأشخاص مختلفة فيمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشـــخص الأول بطرق عددها 365 ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثاني بطرق عددهـــا 364 ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثالث بطرق عددها 363 وهكـــذا .
إذن عدد عناصر فضاء العينـــة S_8 للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أيام أعياد ميلاد مختلفة لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S_8) = 365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - n + 1)$$

٨ – في تجربة تحديد جنس الطفل (ولد أو بنت) وتسلسل ميلاده في العائلات التى لديها ثلاثة أطفال فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_9 يكون

$$n(S_9) = (2)^3 \times (365)^3 = 389017000$$

٩ – في تجربة تسجيل تاريخ ميلاد 6 من الأشخاص إذا علم تاريخ ميلاد كل من الشخص الأول والشخص الثاني فإن عدد عناصر فضاء العينة S_{10} يكون

$$n(S_{10}) = 1 \times 1 \times (365)^4 = 17748901000$$

الفصل 2

تمارين

١ – من حروف كلمة HISTORY أوجد عدد الكلمات ذات الأربعة حروف والتي يمكن تكوينها في كل من الحالات الآتية :

أ – بدون أي قيود .

ب – كل كلمة تبدأ بالمقطع ST .

ج – كل كلمة تبدأ بحرف متحرك من الحروف المتحركة في كلمة HISTORY .

د – كل كلمة تحتوى الحرف R .

٢ – في أحد النوادي الرياضية أراد أحد الأشخاص أن يشترك في لعبتين إحداهما لعبة جماعية والأخرى لعبة فردية . أوجد عدد الطرق الممكنة للاشتراك إذا علمت أن النادي به أربع العاب جماعية وثلاث العاب فردية . أوجد كذلك عدد الطرق الممكنة للاشتراك في لعبة واحدة جماعية أو فردية .

٣ – كم خط تليفون يمكن تركيبه في مدينة ما إذا تألف رقم التليفون من سبعة أرقام

أ – أولها الرقم 8 ؟ ب – تبدأ برقم زوجي ؟

ج – تبدأ برقم اكبر من 6 ؟ د – تبدأ بثلاثة أرقام متساوية غير صفرية ؟

٤ – إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية الإنجليزية يتبعهما ستة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفرا .

أ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات .

ب – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى تبدأ بالحرف R .

٥ – نفرض مجموعة الأرقام { 9 , 8 , 7 , 6 , 4 , 3 , 2 } . كم عددا مكوناً من خمسة أرقـام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟ ومن هذه الأعداد كم منها يكون به أرقام مكررة ؟

٦ – مكتبة بها 800,000 كتاب ، يراد عمل كود لكل كتاب يتكون من ثـــلاث حــروف أبجدية يتبعها رقمين . هل يمكن عمل كود بهذه الطريقة لجميع الكتب ؟

٧ – نفرض مجموعة الأرقام الزوجية { 8 , 6 , 4 , 2 } وبفرض السماح بالتكرار احسب :

١ – كم عددا مكونا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٢ – كم عددا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة وقيمته اقل من 6000 ؟

٣ – كم عددا من ثلاثة أرقام قيمته اكبر من 500 يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٨ – بكم طريقة يمكن ترتيب الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 للحصول على عدد x بحيث أن $5000 < x \leq 7000$ ؟

أ – مع السماح بالتكرار . ب – بدون السماح بالتكرار .

٩ – كم عدد المصفوفات من رتبة $m \times n$ التي يمكن تكوينها بحيث يكون عناصرها 0 أو 1 ؟

١٠ – بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أولاد وثلاثة بنات في صف به ستة مقاعد إذا كان

أ – الجلوس بدون أي قيود ؟ ب – يجلس الأولاد معاً والبنات معاً ؟

ج – تجلس البنات معاً ؟ د – يجلس الأولاد معاً ؟

١١ – خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة في صـــــف واحـــد بحيث تجلس النساء متجاورات . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

١٢ – خمسة طرق مزدوجة تؤدى إلى تقاطع (دوران) في أحد المدن . بكم طريقة يمكن لسائق سيارة أن يتجه إلى الدوران من أياً من الطرق ويخرج مـــن طريـــق آخـــر ؟ وإذا أراد السائق أن يتجه إلى الدوران من أحد الطرق ويخرج من أي طريق بما في ذلـــك طريـــق الدخول فبكم طريقة يتم ذلك ؟

١٣ – أربعة طلاب بالفرقة الثالثة و أربعة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على ثمانية مقاعد مصفوفة في قاعة امتحان بحيث لا يجلس طالبان متجاوران ومن نفس الفرقة ، بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

١٤ – بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون
أ – في صف به سبعة مقاعد ؟ ب – حول مائدة مستديرة بها سبعة مقاعد ؟

١٥ – أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار رئيس ووكيل وأمين صندوق لمجلس إدارة أحد الأندية الرياضية من بين عشرة أشخاص .

١٦ – في أحد النوادي الاجتماعية تقدم 25 عضوا للترشيح في مجلس إدارة النادي لاختيار رئيس للنادي ونائب للرئيس ووكيل وأمين صندوق . فإذا علمت أن هناك 5 أعضاء لا يرغبون في الترشيح لمنصب وكيل للنادي أو أمين صندوق فبكم طريقة يمكن اختيار المناصب الأربعة ؟

١٧ – في أحد المؤتمرات العلمية كان هناك 6 من الأساتذة كل منهم سيلقى بحثاً أمام الحضور . بكم طريقة يتم تنظيم إلقاء الأبحاث ؟ وإذا علمت أن أحد الأبحاث لابد أن يلقى في بداية المؤتمر فبكم طريقة يتم تنظيم إلقاء الأبحاث في هذه الحالة ؟

١٨ – قاعة للاجتماعات لها أربعة أبواب مختلفة . بكم طريقة يمكن لشخص الدخول إلى القاعة من أحد الأبواب والخروج من باب آخر ؟ بكم طريقة يمكن ذلك إذا كان الدخول والخروج من أي باب ؟

١٩ – فصل به 24 طالب وفى أحد الحصص الدراسية أراد مدرس الرياضيات إخراج 8 طلاب بطريقة عشوائية إلى السبورة وذلك للإجابة على مسائل الرياضيات . بكم طريقة يمكن للمدرس عمل ذلك ؟ وبكم طريقة يمكن للمدرس في خلال ثلاث حصص دراسية بمعدل 8 طلاب في كل حصة ، أن ينتهي من إخراج جميع الطلاب ؟

٢٠- في أحد المدارس من بين 5 طلاب بالفرقة الأولى ، 10 طلاب بالفرقـة الثانيـة ، 15 طالب بالفرقة الثالثة يراد اختيار لجنة ثقافية بالمدرسة تتكون من 9 طلاب ، أوجـد عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه اللجنة في كل من الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود في اختيار أعضاء اللجنة .

٢ – أحد طلاب الفرقة الرابعة لابد أن يكون في هذه اللجنة .

٣ – أحد طلاب الفرقة الأولى لابد ألا يكون في هذه اللجنة .

٤ – اللجنة تشمل أعداد متساوية من الطلاب في الفرق الدراسية الثلاث .

٥ – اللجنة تشمل 2 بالفرقة الأولى , 3 بالفرقة الثانية , 4 بالفرقة الثالثة .

٦ – اللجنة تشمل 5 طلاب بالفرقة الثانية .

٧ – اللجنة لا تشمل أياً من طلاب الفرقة الأولى .

٨ – اللجنة تشمل طلاب الفرقة الثالثة فقط .

٩ – اللجنة تشمل على الأكثر 3 طلاب من الفرقة الثانية .

١٠ – اللجنة تشمل على الأقل 6 طلاب من الفرقة الثالثة .

٢١- امتحان لمادة الرياضيات به ثمانية أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ستة أسـئلة فقط .

١ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا كان السؤال الأول إجباري ؟

٣ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

٤ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة أربعة أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ثلاثة أسئلة فقط من كل مجموعة فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختـار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٥ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة أربعة أسـئلة ومطلـوب مـن الطلاب الإجابة على ثلاثة أسئلة فقط من كل مجموعة وكان السـؤال الأول في كل مجموعة إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢٢- امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice يحتوى علـــى 20 ســؤال ولكل سؤال ثلاثة إجابات منها واحدة فقط صحيحة . أراد أحد الطلاب الإجابة علـــى كل أسئلة الامتحان بالتخمين

١ - بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢ - بكم طريقة يمكن للطالب الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة ؟

٣ - بكم طريقة تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان ؟

٤ - بكم طريقة تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان ؟

٢٣ - امتحان في مقرر التاريخ به 20 سؤال بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice وخمسة أسئلة مقاليه والمطلوب أن يجيب الطالب على 15 سؤال من أسئلة الاختيار مـــن متعدد وثلاثة أسئلة مقاليه . بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحـــان ؟ وإذا كـــان الأسئلة الخمسة الأولى في الاختيار من متعدد إجبارية والسؤال الأول في أسئلة المقــال إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢٤ - فريق يتكون من 3 أولاد ، 4 بنات يتم اختياره من مجموعة تتكون من 7 أولاد ، 9 بنات . فإذا علمت أن بنتان من المجموعة لا ترغبان في اللعب في نفس الفريق ، بكـــم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

٢٥ - في أحد المطاعم وضع إعلان يتيح للزبائن إمكانية الاختيار من تشكيلة من 200 نوع من البيتزا . فإذا علمت انه بالإضافة إلى المكون الأساسي وهو الجبن يوجد بالمطعم 7 مكونات إضافية يمكن الدمج بين أياً منها لعمل مجموعة متنوعة من البيتزا . والســؤال هو ، هل هذا الإعلان صادق أم هو إعلان كاذب ؟

٢٦ - أحد المطاعم تقوم بأعداد وجبات جاهزة للزبائن . فإذا علمت انـــه يوجـــد بـــالمطعم 3أنواع من الخبز ، 5 أنواع من الخضراوات ، 6 أنواع من اللحوم ، 10 أنواع من السلطات ، 4 أنواع من المشروبات . وإذا كانت الوجبة تشمل نوع واحد من كـــل من الخبز والخضار واللحوم ومشروب واحد ونوعين من السلطات . بكم طريقة يمكـــن تقديم أنواع مختلفة من هذه الوجبات الجاهزة ؟

٢٧ – أحد المطاعم تقوم بأعداد ساندويتشات جاهزة للزبائن . فإذا علمت انه يوجد بـــالمطعم نوعان من الخبز ، 6 أنواع من اللحوم ، 5 أنواع من الجبن وثلاثـــة أنـــواع مـــن السلطات . وبفرض أن السندوتش يحتاج بالضرورة إلى نوع واحد من الخبز ونـــوع واحد من اللحوم أو الجبن ونوعان على الأقل من السلطات بكم طريقة يمكن تقـــديم أنواع مختلفة من هذه الساندويتشات ؟

٢٨ – شخص له تسعة أصدقاء من الجنسين ويرغب في دعوة أربعة منهم إلى العشاء . أوجـــد عدد الطرق الممكنة لدعوقم في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معاً .

٣ – اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً .

٢٩ – في أحد الأندية الرياضية يوجد 30 لاعبا مسجلين في فريق كرة القدم منهم 4 لاعبين في حراسة المرمى ، 10 لاعبين في خط الدفاع ، 7 لاعبين في خط الوسط ، 9 لاعبين في خط الهجوم . بكم طريقة يمكن تشكيل فريق للعب أحد المباريات بحيث يتكون مـــن حارس للمرمى وأربعة لخط الدفاع وأربعة لخط الوسط واثنان لخط الهجـــوم وأربعـــة لاعبين احتياطي منهم حارس للمرمى ولاعب احتياطي لكل خط من خطوط الدفـــاع والوسط والهجوم علما بأن كابتن الفريق يلعب في خط الهجوم ولابد من اختياره ضمـــن الفريق . وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع فكم يكون عدد طرق تشـــكيل الفريق .

٣٠ – إذا كان عدد الطلاب الذين تم قبولهم في أحد الأقسام بالكلية 30 طـــالب ، بكـــم طريقة يمكن تقسيم هؤلاء الطلاب

١ – إلى مجموعتان متساويتان من الطلاب .

٢ – إلى ثلاثة مجموعات متساوية من الطلاب .

٣ – إلى أربعة مجموعات مكونة من 9 , 8 , 7 , 6 طالب .

٣١ – يوجد 10 من النقاط A , B , C , D , E , F, G , H , I , J في المستوى بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم مستقيم منها لا يمر بالنقطة A أو F أو G ؟

٣ –كم عدد الأشكال الرباعية التي يمكن تحديدها بهذه النقاط ؟

٤– كم من هذه الأشكال الرباعية يحتوى النقطة B كرأس فيها ؟

٥ – كم من هذه الأشكال الرباعية يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين A , C ؟

٣٢ – يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد الدوائر التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم دائرة منها لا تمر بالنقطة (x_1, y_1) ؟

٣ – كم دائرة منها لا تمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) ؟

٤– كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) ؟

٥ – كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) ؟

٦ – كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ؟

٣٣ – قطيع من الأغنام به 10 أغنام سليمة و 5 أغنام مصابة . بكم طريقة يمكن أخذ عينة من ثلاث أغنام في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود في اختيار العينة .

٢ – العينة تحتوي على ثلاث أغنام سليمة .

٣ – العينة تحتوي على ثلاث أغنام مصابة .

٤ – عدد الأغنام السليمة في العينة اكبر من عدد الأغنام المصابة .

٥ – العينة تحتوى على أغنام سليمة ومصابة .

٣٤ – بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من 4 طلاب على الأقل من بين سبعة طـــلاب ؟ وإذا علمت أن أحد الطلاب لابد من وجوده ضمن هذه اللجنة فبكـــم طريقـــة يتـــم تشكيل اللجنة بحيث تتكون من 4 طلاب على الأقل من بين الطلاب السبعة ؟

٣٥ – بكم طريقة يمكن لستة أشخاص الوقوف في صف من اجل الصعود إلى حافلـــة ؟ وإذا أصر ثلاثة أشخاص من الستة على أن يكون الواحد تلو الآخر في ترتيـــب الصعـــود بالحافلة ، فبكم طريقة يتم صعود الأشخاص الستة في هذه الحالة ؟

٣٦ – أوجد عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في صـــف بشـــرط إصـــرار شخصين منهما أن يجلسا متجاورين .

٣٧– ألقي حجر نرد أربعة مرات على التوالي ، أوجد عدد طرق الحصول على أربعة أرقـــام مختلفة .

٣٨– ألقيت أربعة أحجار نرد ، أوجد عدد طرق الحصول على أربعة أرقام مختلفة في كل مـــن الحالات الآتية :

١ – الأحجار الأربعة متماثلة .

٢ – الأحجار الأربعة متميزة .

٣٩ – أوجد عدد التباديل المختلفة لحروف كلمة **MISSISSIPPI** ؟ كم تبديل منـــهم يبدأ بالمقطع **SSSS** ؟

٤٠– بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كل من الكلمات الآتية :

1 – ALGEBRA **2 – CALCULUS**
3 - STATISTICS **4 - SCIENCE**

٤١– بكم طريقة يمكن ترتيب حروف **RIZKALLA** بحيث يكون حرفي **A** متتاليين .

٤٢ – فصل به عشرون طالبا ، بكم طريقة يمكن توزيع خمسة اختبارات مختلفة علـــى هـــؤلاء الطلبة إذا أخذ كل أربعة من الطلبة نفس الاختبار ؟

٤٣ –أوجد عدد طرق ترتيب حروف كلمة PROBABILITY لكل من الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB .

٣ – كل ترتيب ينتهي بالمقطع LITY .

٤ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB وينتهي بالمقطع LITY .

٥ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB أو ينتهي بالمقطع LITY .

٦ – كل ترتيب يحتوى المقطع BB .

٤٤ – بكم طريقة يمكن ترتيب 10 مصابيح حمراء و 9 مصابيح صفراء و 8 مصابيح زرقاء و 7 مصابيح خضراء على واجهة أحد المحلات التجارية ؟

٤٥ – أشترى رجل 9 العاب مختلفة لتوزيعها على أولاده الأربعة . بكم طريقة يمكن أن يعطى أحدهم ثلاثة العاب والباقين كل منهم لعبتين ؟

٤٦ – ترغب شركة مقاولات في بناء 10 نماذج مختلفة لناطحات سحاب في أحد الشوارع الشهيرة بالعاصمة بحيث يكون 4 نماذج على الجانب الأيمن ، 8 نماذج على الجانب الأيسر للشارع . بكم طريقة يتم ذلك ؟

٤٧– مجموعة تتكون من 5 كتب هندسة ، 4 كتب جبر ، 3 كتب تفاضل ، 5 كتب فيزياء ، 3 كتب كيمياء ، 4 كتب أحياء يراد وضعها معاً على رف . أوجد ما يأتي :

١ – عدد طرق ترتيب الكتب معاً على الرف .

٢ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب كل مقرر معاً .

٣ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب الرياضيات معاً وكتب العلوم معاً .

٤ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب الهندسة معاً .

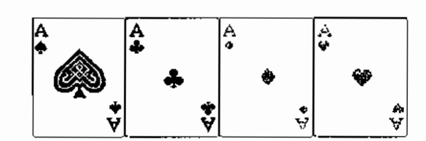
٤٨ – بكم طريقة يمكن توزيع 50 شخص على 24 غرفة في فندق به 10 غرف من ذات سريرين و 8 غرف ذات ثلاث أسِـرَّة و 6 غرف مفردة ذات سرير واحد .

٤٩ – صندوق يحتوى على 10 كرات، أوجد عدد العينات المرتبة في كل من الحالات الآتية:

أ – حجم العينة 3 مع الإرجاع .

ب – حجم العينة 3 بدون إرجاع .

٥٠ – بكم طريقة يمكن سحب عينة من 7 ورقات الواحدة بعد الأخـــرى مـــن الكوتشـــينة وبدون إرجاع وبحيث يكون أربعة أوراق من الأوراق المسحوبة تحمل الرقم ١ .



٥١ – صندوق يحتوى على6 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء

١ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة حمراء ؟

٣ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين حمراء وكرة بيضاء ؟

٤– بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث كرات من نفس اللون ؟

٥ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة اللون ؟

٥٢ –في تجربة سحب ورقتان عشوائياً على التوالي من الكوتشينة أوجد عدد عناصر فضـــاء العينة لهذه التجربة في الحالات الآتية :

١ – السحب مع الإرجاع .

٢ – السحب بدون إرجاع مع مراعاة الترتيب .

٣ – السحب بدون إرجاع وبدون مراعاة للترتيب .

٥٣ – بكم طريقة يمكن سحب عينة من 5 ورقات مـــــن أوراق اللعـــب (الكوتشـــينة) في الحالات الآتية :

أولا : السحب مع الإرجاع .

ثانيا : السحب بدون إرجاع .

٥٤ – أوجد عدد عناصر فضاء العينــة لكل من التجارب الآتيــة :

١ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة والسحب مع الإرجاع .

٢ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة متماثلة والسحب بدون الإرجاع.

٣ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة مميزة والسحب بدون إرجاع .

٤ – اختيار مجموعة من 5 كرات من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٥ – اختيار كرتان مختلفتا اللون من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٦ – اختيار مجموعة من 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء من صندوق يحتوى علـــى 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٧ – تسجيل جنس الطفل وتسلسل ميلاده في العائلات التي لديها طفلان .

٨ – تسجيل تاريخ ميلاد خمسة أشخاص بينهم اثنان لهما نفس تاريخ الميلاد .

٩ – تسجيل تاريخ ميلاد خمسة أشخاص إذا علم تاريخ ميلاد اثنان منهم .

١٠ – تسجيل جنس الطفل وتسلسل ميلاده في العائلات التي لديها أربعة أطفال .

٥٥ – في تجربة سحب أربعة ورقات من أوراق اللعب (الكوتشينة) على التـــوالي وبـــدون إرجاع ، أوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الأوراق الأربعة جميعها صور .

٢ – الأوراق الأربعة ليس بها صور .

٣ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام اكبر من 5 .

٤ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام زوجية .

٥ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام فردية .

٦ – الأوراق الأربعة بها ورقتان صور وورقتان لأرقام اكبر من 8 .

٧ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام مختلفة .

٨ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام متساوية .

٩ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وليس بها أرقام تقبل القسمة على 3 .

١٠ – الأوراق الأربعة بها صورة وثلاثة أرقام متساوية .

٥٦ –إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $x^2 + b x + c = 0$ تم تعيينـــها عـــن طريق إلقاء حجر نرد مرتين على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثل المعـــامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل العدد c .

١ – أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها .

٢– أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٣– أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٤– أوجد عدد المعادلات التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

٥٧– إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $a x^2 + b x + c = 0$ يتم تعينها عـــن طريق إلقاء حجر نرد ثلاث مرات على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثـــل المعامل a والعدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل المعامل b بينما العدد الذي يظـــهر في الرمية الثالثة يمثل العدد c . أوجد عدد المعادلات في الحالات الأربعة في التمرين السابق .

٥٨– نفرض $A = \{ a_1 , a_2 \}$, $B = \{ b_1 , b_2 , b_3 \}$

١ – كم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها ؟

٢ – كم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون أحادية (1-1) ؟

٣ – إذا كان $b_2 = b_3$ فكم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون فوقية (onto) ؟

٥٩– نفرض $A = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$, $B = \{ b_1 , b_2 , \dots , b_m \}$

١ – أثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها يساوى m^n .

٢ – إذا كان $m \geq n$ فأثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون أحادية (1-1) يساوى $_mP_n$.

٣ – إذا كان $m = n$ فأثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون فوقية (onto) يساوى $n!$.

الفصل 3

دالة الاحتمال
Probability Function

١- تعريف الاحتمال Probability Definition

يوجد للاحتمال عدة تعاريف مختلفة كالآتي :

(أ) – التعريف الكلاسيكي (القديم) للاحتمالات
Classical definition of Probability

يعتمد هذا التعريف أساساً على أن نواتج التجربة العشوائية (الأحداث الأولية) جميعها متساوية الفرصة في الحدوث أو الوقوع أو الظهور . فإذا كان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها نواتج التجربة العشوائية هو n طريقة وجميعها متساوية الفرصة في الحدوث وكان من بينها m طريقة يظهر بها حدث A حيث $m \le n$ فإن احتمال وقوع الحدث A يرمز له $P(A)$ ويعرّف بالصورة

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

وهذا التعريف لا يمكن الاعتماد عليه في جميع الأحوال لأن هناك بعض التجارب أو المحلولات يكون لبعض النواتج فرص اكبر (أو اقل) في الظهور عن غيرها من النواتج ولمثل هذه التجارب لا يمكن استخدام هذا التعريف .

(ب) – التعريف التجريبي (التكراري) للاحتمالات
Experimental definition of Probability

التعريف التجريبي للاحتمالات لا يشترط تساوى فرص ظهور نواتج التجربة العشوائية كما في التعريف الكلاسيكي ولكنه يعتمد أساساً على أجراء التجربة عدد كبير جداً من المرات ومعرفة نتائجها وبعد ذلك نستنتج قيمة الاحتمال ، أي أن التعريف التجريبي للاحتمال مبنى على فكرة التكرار النسبي للتجربة فإذا أجرينا تجربة ما n من المرات تحت نفس الظروف

وكان عدد المرات من بينها والتي نلاحظ فيها وقوع حدث معين A هو $n(A)$ من المـوات حيث $n(A)$ بالطبع تعتمد على n فإن خارج القسمة $\frac{n(A)}{n}$ يسمى التكـــرار النســبي للحدث A ، أي أن

$$\text{التكرار النسبي للحدث } A = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث } A}{\text{عدد مرات أجراء التجربة}}$$

وبالملاحظة وجد انه عندما يزداد عدد المحاولات أي عندما تزداد قيمة n فإن المقدار $\frac{n(A)}{n}$ والذي يمثل التكرار النسبي للحدث A يكتسب بعض الانتظام ويؤول إلى نهاية معينة يســتقر حولها وهذه النهاية تمثل احتمال الحدث A ويرمز لها $P(A)$ ، أي أن احتمال الحـــدث A يعرّف بالصورة

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

وهذا يمثل التعريف التجريبي للاحتمالات وهذا التعريف يعتبر مشكوك فيه رياضياً ولا يمكـــن الاعتماد عليه كأساس دقيق لدراسة الاحتمالات نظراً لوجود بعض الصعوبات التي يتضمنـــها وهذه الصعوبات نلخصها في الآتي :

<u>أولا</u> : من الناحية العملية فإن النهاية $\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$ لا يمكن حسابها لأنه من المســتحيل إعادة أجراء التجربة عدد لا نهائي من المرات فهذا ليس له معنى ونضيف إلى ذلك انــه إذا اعتبرنا لقيم n الكبيرة أن $\frac{n(A)}{n}$ هو تقريب لاحتمال الحدث A فإنه لا يوجد أسلوب أو طريقة نحلل بها الخطأ في هذا التقريب .

ثانيا : لا يوجد مبرر أو سبب يجعلنا على ثقة أو يقين في أن النهاية $\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$ تكـــون موجودة ونضيف إلى ذلك أيضاً انه حتى وان كانت هذه النهاية موجودة فإنه لا يوجــد مبرر أو سبب يجعلنا على ثقة أو يقين بأن هذه النهاية تكون وحيدة ووفقا لذلك فإنـــه ليس مضموناً أن يكون احتمال وقوع الحدث A وحيد القيمة .

ثالثا : وفقاً للتعريف التجريبي للاحتمالات فإن الاحتمالات التي تعتمد في أساسها على مقــدار الثقة لدينا وعلى معلوماتنا الشخصية لا يمكن تبريرها ، فمثلاً التعبيرات

" احتمال أن تسقط أمطار غدا يكون بنسبة 30 % " أو

" احتمال النجاح في الامتحان اكبر من 90 % " أو

" يوجد احتمال لارتفاع أسعار النفط بنسبة 20% في الشهر القادم "

مثل هذه التعبيرات أو ما شابهها لن يكون لـــه معـــنى في ظـــل التعريـــف التجريـــبي للاحتمالات .

وبالتالي يمكننا القول أن كل من التعريف الكلاسيكي والتعريف التجريبي للاحتمـــالات لا يفي بموضوع دراســـة الاحتمالات ولتفادى العيوب في التعريفيـــين الســـابقين تم وضـــع التعريف الرياضي للاحتمالات **Mathematical definition of Probability** وهـــو تعريف تم وضعه في صورة دقيقـــة مبنى على أساس افتراض بعض المسلمات والـــتي تســـمى بمسلمات نظرية الاحتمال **Axioms of Probability Theory** وهي تتفق وتتناسب مـــع فكرتنا الإدراكية لمعنى الاحتمال ومن هذه المسلمات تم اشتقاق نظريات الاحتمالات وهذا هـــو البناء الرياضي لعلم الاحتمالات وهو في ذلك لا يختلف عن الأبنية الرياضية المختلفـــة الـــتي درسناها من قبل ، تلك الأبنية التي تفترض وجود الأساس الذي نبدأ منه وننطلق نحو البنـــاء الرياضي بأكمله وسوف نتعرف على هذا الأساس في البند القادم بعنوان مســـلمات نظريـــة الاحتمال .

مثال ١ :

ألقي حجر نرد 100 مرة ، والجدول الآتي يوضح تكرار ظهور كل من الأعداد الستة في فضاء العينة

العدد	1	2	3	4	5	6
التكرار	14	17	20	18	15	16

أوجد التكرار النسبي للحدث

١ – ظهور العدد 3 .

٢ – ظهور العدد 4 .

٣ – ظهور عدد زوجي .

٤ – ظهور عدد أولى .

٥ – ظهور عدد أقل من 3 .

٦ – ظهور عدد أكبر من 3 .

الحل :

$$\text{التكرار النسبي للحدث } A = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث } A}{\text{عدد مرات أجراء التجربة}}$$

١ – التكرار النسبي لظهور العدد 3 يساوى $\frac{20}{100} = 0.2$

٢ – التكرار النسبي لظهور العدد 4 يساوى $\frac{18}{100} = 0.18$

٣ – الحدث ظهور عدد زوجي هو $\{2,4,6\}$ وعدد مرات وقوعه $17+18+16 = 51$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد زوجي يساوى $\frac{51}{100} = 0.51$

٤ – الحدث ظهور عدد أولي هو $\{2,3,5\}$ وعدد مرات وقوعه $17+20+15 = 52$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أولي يساوى $\frac{52}{100} = 0.52$

٥ – الحدث ظهور عدد أقل من 3 هو $\{1, 2\}$ وعدد مرات وقوعه $14+17=31$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أقل من 3 يساوى $\frac{31}{100} = 0.31$

٦ – الحدث ظهور عدد أكبر من 3 هو $\{4,5,6\}$ وعدد مرات وقوعه $18+15+16 = 49$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أكبر من 3 يساوى $\frac{49}{100} = 0.49$

٢ - مسلمات نظرية الاحتمال Axioms of Probability Theory

الهدف من الأبحاث في الرياضيات هو الحصول على نتائج جديدة وإثبات صحتها وكذلك إعطاء براهين أبسط لنتائج مبرهنة من قبل واكتشاف وابتكار روابط بين الفروع المختلفة في الرياضيات وبناء وحل نماذج رياضية تتعلق بمشاكل حقيقية في العالم من حولنا وهكذا إلى ما شابه ذلك . ولاكتشاف نتائج جديدة فإن المهتمين بالرياضيات يستخدمون طرق عديدة منها المحاولة والخطأ والتحليل الاستقرائي ودراسة الحالات الخاصة والتخمين وهنا تتجلى الموهبة والإبداع بالإضافة إلى طرق أخرى . وبوجه عام فإن الكثير من القضايا التي نتعامل معها في حياتنا تكون بحاجة إلى إثبات وبدون تقديم الإثبات تبقى مثل هذه القضايا مجرد ادعاءات معلقة إلى أن يتم إثبات صحتها أو إثبات عدم صحتها ، وبالمثل في مجال الرياضيات فإنه عندما يتم اكتشاف نتيجة جديدة فإن صحتها تبقى موضوع مشكوك فيه إلى أن يتم إثباتها بوضوح . وفي بعض الأحيان يكون لدينا نتيجة جديدة ما ونحاول إثباتها ولكننا نفاجأ بوجود أمثلة تثبت فشل هذه النتيجة ، ومثل هذه الأمثلة تسمى بالأمثلة المضادة **Counter Examples** أما إذا كانت هذه النتيجة صائبة فإننا نحتاج إلى وضع برهان يثبت هذه النتيجة وقد يأخذ هذا البرهان أيام أو شهور أو سنين وربما قرون من الزمن .

وفى علم الاحتمالات فإن البراهين تتم في إطار طريقة تعرف باسم طريقة المسلمات ، ولتقديم فكرة مبسطة عن ما هو المقصود بطريقة المسلمات نعطى المثال التوضيحي التالي : نفرض أننا نريد أن نقنع شخص ما بأن العبارة L_1 صحيحة . في هذه الحالة سوف نحاول أن نوضح لهذا الشخص أن هذه العبارة تكون ناتجة بأسلوب منطقي من عبارة أخرى L_2 أقل تعقيداً وابسط من العبارة L_1 وقد تكون مقبولة لديه ولكن أن كانت العبارة L_2 غير مقبولة وغير كافية للإقناع فإنه يتوجب علينا أن نبرهن أو نقيم الدليل على أن العبارة L_2 يمكن استنتاجها منطقياً من عبارة ابسط L_3 فإذا كانت هذه العبارة الجديدة L_3 لا تزال موضع للنقاش وجدل من هذا الشخص فإن العملية يجب أن تستمر على هذا المنوال حتى نصل إلى عبارة تكون مقبولة لديه بدون الحاجة إلى أي إيضاحات إضافية وعندئذ فإن هذه العبارة الأخيرة التي وصلنا إليها تصبح أساساً للبرهان ووجودها ضروري لأنه بدونها تصبح عملية التوضيح عملية غير منتهية ومثل هذه العبارة تسمى مسلمة **Axiom** وتكون بمثابة نقطة انطلاق نحو البرهان ، وتعرف المسلمة أحياناً بأنها قضية أو عبارة بلغت في ذاتها حداً من البداهة

يجعلنا نعجز عن الاهتداء إلى قضايا أو عبارات أشد بداهة منها لنبرهن بها عليها ، وعلى ذلك يمكننا القول أن طريقة المسلمات تعتمد في أساسها على بعض العبارات المتناسقة والتي لا تحتاج إلى أي تبرير أو زيادة إيضاح وهذه العبارات تسمى مسلمات **Axioms** ومن هذه المسلمات يمكن الوصول إلى نتائج جديدة تسمى نظريات **Theorems** ويمكن إثباتها ومن هذه النظريات يمكن أيضاً اكتشاف نظريات جديدة وتستمر هذه العملية بهذه الطريقة لتضع لنا الجانب النظري من علم جديد . وفى موضوعنا الشاغل في هذا الكتاب وهو علم الاحتمالات يوجد ثلاث مسلمات أساسية تمثل الأساس الذي تم عليه بناء نظرية الاحتمال ، وقد حان الوقت الآن للتعرف على هذه المسلمات الثلاث وهى تعرف كالآتي :

نفرض أن S فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، لأي حدث A من فضاء العينة S يتعين عدد $P(A)$ يرافق الحدث A ويسمى احتمال الحدث A ويحقق المسلمات الآتية :

المسلمة الأولى : $P(A) \geq 0$

المسلمة الثانية : $P(S) = 1$

المسلمة الثالثة : إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

نلاحظ أن المسلمة الأولى تخبرنا بأن احتمال وقوع أي حدث يكون دائما غير سالب والمسلمة الثانية تضمن لنا أن احتمال وقوع الحدث المؤكد S يساوى 1 بينما المسلمة الثالثة تخبرنا بأنه لأي متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية فإن احتمال وقوع حدث على الأقل منهم يساوى مجموع احتمالاتهم .

تعريف ١ :

الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما يقال أنهما متساويا الفرصة في الوقوع **equally likely** لنعنى انهما متساويا الاحتمال أي أن $P(A) = P(B)$ ويقال كذلك أن الحدثان الأوليان $s_1 , s_2 \in S$ متساويا الفرصة في الوقوع لنعنى انهما متساويا الاحتمال أي أن $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\})$.

نظرية ١ :

احتمال الحدث المستحيل يساوى صفر ، أي أن $P(\Phi) = 0$.

البرهان : نفرض أن $A_1 = S \quad , \quad A_i = \Phi \quad \forall\ i \geq 2$

إذن $A_1, A_2, \ \ldots$ تكون متتابعة من الأحداث المتنافية وتحقق $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ،

ومن المسلمة الثالثة

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$$

$$= P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\Phi)$$

ومن ذلك نحصل على $\sum_{i=2}^{\infty} P(\Phi) = 0$ وهذا يتحقق فقط إذا كان $P(\Phi) = 0$.

نظرية ٢ :

إذا كان $A_1, A_2, \ \ldots \ , A_n$ أحداث متنافية فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

البرهان : نفرض أن $A_i = \Phi \quad \forall \quad i > n$

إذن $A_1, A_2, \ \ldots$ متتابعة من الأحداث المتنافية وتحقق $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، ومن المسلمة الثالثة

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

وفي الحالة الخاصة بوضع $n = 2$ في نظرية (٢) نحصل على

إذا كان $A_1 \ , \ A_2$ حدثان متنافيان فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

نظرية ٣ :

لأي حدث A من فضاء العينة S فإن $P(A) \leq 1$.

البرهان :

حيث أنه لأي حدث A فإن A , A' تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = A \cup A' \quad , \quad A \cap A' = \Phi$$

إذن

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

ومن المسلمة الثانية $P(A \cup A') = P(S) = 1$ وبالتالي ينتج أن

$$P(A) + P(A') = 1$$

ومن المسلمة الأولى وحيث أن $P(A') \geq 0$ إذن ينتج أن $P(A) \leq 1$.

مثال ٢ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرة واحدة فإن فضاء العينة $S = \{H, T\}$ ويقصد بعملة معدنية متزنة أن ظهور وجه العملة الصورة أو الكتابة متساوية الفرصة في الحدوث وهذا يعنى انه عند إلقائها فإن احتمال ظهور وجه العملة الصورة H يساوى احتمال ظهور وجه العملة الكتابة T أي أن $P(\{H\}) = P(\{T\})$ وحيث أن $\{H\}, \{T\}$ أحداث متنافية اتحادها هو S ، ومن المسلمات الثانية والثالثة

$$1 = P(S) = P(\{H, T\}) = P(\{H\}) + P(\{T\})$$
$$= P(\{H\}) + P(\{H\}) = 2\, P(\{H\})$$

إذن

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

وإذا كانت العملة المعدنية غير متزنة وبحيث أن احتمال ظهور الصورة H ضعف احتمال ظهور الكتابة T أي أن $P(\{H\}) = 2\, P(\{T\})$ وبالتالي

$$1 = P(S) = P(\{H, T\}) = P(\{H\}) + P(\{T\})$$
$$= 2\, P(\{T\}) + P(\{T\}) = 3\, P(\{T\})$$

إذن

$$P(\{T\}) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(\{H\}) = \frac{2}{3}$$

مثال ٣ :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فإن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ويقصد بحجر نرد متزن أن عناصر فضاء العينة جميعها متساوية في الاحتمال ، أي أن

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$$

وحيث أن $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ أحداث متنافية اتحادها هو S إذن من المسلمات الثانية والثالثة

$$\therefore\ 1 = P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$
$$= 6\ P(\{1\})$$

إذن $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$ وبالتالي نحصل على

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

مثال ٤ :

إذا كان احتمال أن يتخرج أحد الطلاب من الكلية بتقدير امتياز أو جيد جدا يساوى 0.9 وإذا كان احتمال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير جيد جدا يساوى 0.6 فأوجد احتمال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير امتياز .

الحل :

نفرض الحدث A هو أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز ،

والحدث B هو يتخرج الطالب بتقدير جيد جدا .

إذن $A \cup B$ هو الحدث أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز أو جيد جدا

$$P(B) = 0.6 \quad , \quad P(A \cup B) = 0.9$$

وحيث أن الحدثان A , B متنافيان لأن وقوع أياً منهما يلغى وقوع الآخر فالطالب لا يمكن أن يتخرج بتقديرين وبالتالي

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \rightarrow \quad 0.9 = P(A) + 0.6$$

إذن احتمال أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز هو

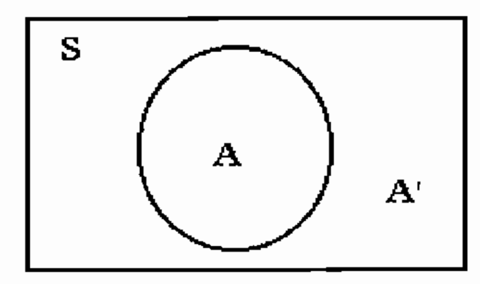
$$P(A) = 0.3$$

٣ – نظريات أساسية Basic Theorems

نظريــة ٤ : لأي حدث A من فضاء العينة S فإن

$$P(A')=1-P(A)$$

البرهان :



الحدثـــان A , A' متنافيـــان لأن $A \cap A' = \Phi$ ومن المســـلمة الثالثــة لنظرية الاحتمال فإن

$$P(A \cup A')=P(A)+P(A')$$

وحيث أن $A \cup A' = S$ إذن

$$P(S)=P(A)+P(A')$$

ومن المسلمة الثانية $P(S)=1$ ، إذن $1=P(A)+P(A')$

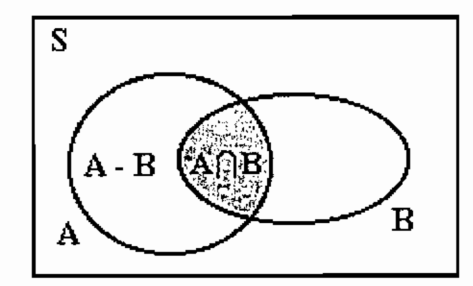
وبالتالي ينتج أن $P(A')=1-P(A)$.

نظريــة ٥ :

لأي حدثان A , B من فضاء العينة S فإن

$$P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$$

البرهان :



حيث أن الأحداث

$$A-B \ , \ A \cap B$$

أحداث متنافية واتحادها هــو الحدث A

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)$$

إذن من المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمـــال فـــإن $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$

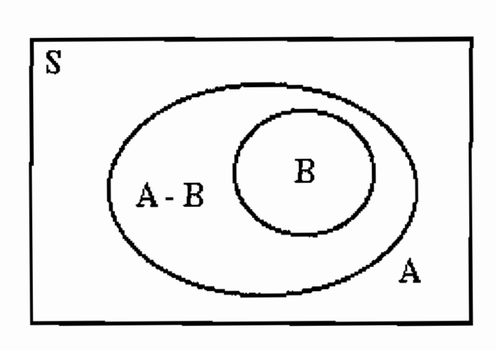
وبالتالي ينتج أن $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

نظريـــة ٦ :

إذا كان A , B حدثان من فضاء العينة S بحيث أن $B \subseteq A$ فإن

$$1-\quad P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$2-\quad P(B)\leq P(A)$$

البرهان :



١ - الحدثان $A-B$, B متنافيـــــان

واتحادهما هو A وذلك لأن $B\subseteq A$

$$A=B\cup(A-B)$$

إذن من المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال

$P(A)=P(B)+P(A-B)$ وبالتالي

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

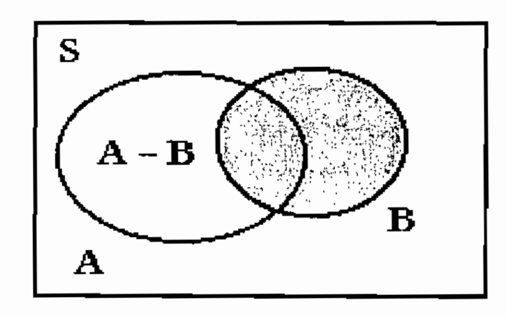
٢ - من المسلمة الأولى لنظرية الاحتمال فـــإن دالـــة الاحتمـــال دالـــة موجبـــة ، إذن $P(A-B)\geq 0$ وحيث أن $P(A-B)=P(A)-P(B)$ إذن $P(A)-P(B)\geq 0$

وبالتالي ينتج أن $P(B)\leq P(A)$.

نظريـــة ٧ : لأي حدثان A , B من فضاء العينة S فإن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

البرهان :



حيث أن $A-B$, B أحداث متنافية

واتحادها هو $A\cup B$ إذن

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$$

وحيث أن

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

وبالتعويض ينتج أن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

تعريف ٢ : أرجحية الحدث

تعرف أرجحية حدث ما A بأنها النسبة بين احتمال الحدث A واحتمال مكملته A' أي أن أرجحية الحدث A هي النسبة

$$P(A) \ : \ 1 - P(A)$$

مثال ٥ :

أوجد الاحتمال p لحدث ما إذا علمت أن أرجحية الحدث هي النسبة $a : b$.

الحل :

حيث أن أرجحية حدث احتماله p هي النسبة $p : 1 - p$ إذن

$$\frac{p}{1-p} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad pb = a - pa$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{a}{a+b}$$

مثال ٦ :

أوجد احتمال ظهور الصورة في تجربة إلقاء عملة معدنية غير متزنة إذا علمت أن أرجحية ظهور الصورة هي النسبة $2 : 1$.

الحل :

نفرض أن احتمال ظهور الصورة يساوي p . وحيث أن أرجحية حدث احتماله p هي النسبة $p : (1 - p)$ وبالتالي

$$\frac{p}{1-p} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad p = 2 - 2p$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

إذن احتمال ظهور الصورة يساوي $\frac{2}{3}$.

مثال ٧ :

نفرض أن A , B حدثان بحيث أن $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{3}{8}$ أوجد :

1 - $P(A\cup B)$
2 - $P(A')$, $P(B')$
3 - $P(A'\cap B')$, $P(A'\cup B')$
4 - $P(A\cap B')$, $P(A\cup B')$

الحل :

1 - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

2 - $P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3 - $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

4 - $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

مثال ٨ :

احتمال أن ينجح طالب في مقرر الاحتمالات $\frac{8}{9}$ واحتمال أن ينجح في مقـــرر الجـــبر $\frac{2}{3}$ واحتمال أن ينجح في مقرر منهم على الأقل $\frac{4}{5}$ فما احتمال أن ينجح الطالب في المقررين معاً ؟

الحل :

نفرض أن A هو الحدث نجاح الطالب في مقرر الاحتمالات ، B هو الحدث نجاح الطـــالب في مقرر الجبر ، إذن $A\cup B$ هو الحدث أن ينجح الطالب في مقرر منهم على الأقل

$P(A)=\frac{8}{9}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ والمطلوب هو حساب قيمة $P(A\cap B)$

وحيث أن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ إذن

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{8}{9}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{34}{45}$

مثال ٩ :

نفرض A , B حدثان بحيث أن $A \subset B$ وكان $P(A)=0.6 \quad , \quad P(B)=0.8$

فأوجد ما يأتي :

1- $P(A') \quad , \quad P(B')$ 3- $P(A \cap B) \ , \ P(A \cup B)$

2- $P(A - B)$ 4- $P(B \cap A')$

الحل :

١ – $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$

٢ – حيث أن $A \subset B$ ، إذن $A \cup B = B \ , \ A \cap B = A$ وبالتالي ينتج أن

$$P(A \cap B) = P(A) = 0.6 \quad , \quad P(A \cup B) = P(B) = 0.8$$

٣ – حيث أن $A \subset B$ ، إذن $A - B = \Phi$ وبالتالي $P(A - B) = 0$

٤ – $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = 0.8 - 0.6 = 0.2$

ملاحظة :

نظرية (٧) تعطينا صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من حدثان A , B أي لحساب $P(A \cup B)$ ويمكن الاستفادة من ذلك في الحصول على صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من ثلاثة أحداث A , B , C كما هو موضح في المثال الآتي :

مثال ١٠ :

لأي ثلاثة أحداث A , B , C أثبت أن

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

الحل :

نفرض أن $F = B \cup C$ ، إذن

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) \qquad (1)$$

وحيث أن $P(F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ ومن قانون التوزيع

$$A \cap F = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

إذن $P(A \cap F) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

وبالتعويض عن $P(A \cap F) \ , \ P(F)$ في المعادلة (1) ينتج المطلوب .

وبالمثل يمكن الحصول على صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من أربعة أحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 أي حساب $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ وتكون بالصورة

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \\ & - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ & - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

أي في الصورة

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

وبوجه عام لحساب احتمال وقوع واحد على الأقل من الأحـــداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أي لحساب $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ نوجد أولا جميـــع التقاطعـــات الممكنـــة لأحـــداث مـــن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ونحسب احتمال كل منها ، وبعد ذلك نضيف احتمالات التقاطعات التي تتكون من عدد فردى من الأحداث ونطرح منها احتمالات التقاطعات التي تتكون مـــن عدد زوجي من الأحداث ، أي أن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

وتعرف هذه العلاقة بقاعدة التضمين والاستثناء **inclusion – exclusion principle**

مثال ١١ :

في أحد المدن يصدر ثلاث جرائد يومية A , B , C . تم اختيار شخص بطريقة عشوائية فإذا كان احتمال أن هذا الشخص يقرأ الجريدة A يساوى 0.45 واحتمال أنه يقرأ الجريدة B يساوى 0.4 واحتمال أنه يقرأ الجريدة C يساوى 0.33 واحتمال أنه يقرأ كل من A , B يساوى 0.3 واحتمال أنه يقرأ كل من A , C يساوى 0.28 واحتمال أنه يقرأ كل من B , C يساوى 0.25 واحتمال أنه يقرأ الجرائد الثلاث يساوى 0.14 أوجد احتمال أن هذا الشخص لا يقرأ أياً من الجرائد الثلاث .

الحل :

نفرض الحدث A هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة A

والحدث B هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة B

والحدث C هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة C

إذن

$$P(A) = 0.45 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(C) = 0.33$$
$$P(A \cap B) = 0.3 \quad , \quad P(A \cap C) = 0.28 \quad , \quad P(B \cap C) = 0.25$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0.14$$

والحدث اختيار شخص لا يقرأ أياً من الجرائد الثلاث هو $(A \cup B \cup C)'$ واحتماله يكون

$$P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

وحيث أن

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

إذن

$$P(A \cup B \cup C) = 0.45 + 0.4 + 0.33 - 0.3 - 0.28 - 0.25 + 0.14 = 0.49$$

وبالتالي فإن احتمال أن هذا الشخص الذي تم اختياره لا يقرأ أيا من الجرائد الثلاث يكون

$$P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - 0.49 = 0.51$$

مثال ١٢ :

نفرض مجموعة الأحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 من فضاء عينة S لتجربة عشوائية مـــا بحيث أن

$$P(A_k) = 2^{-5}\, k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4 \quad ,$$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j \le 4 \quad ,$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4 \quad ,$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)$$

أوجد احتمال عدم وقوع A_k لكل $1 \le k \le 4$.

الحل :

المطلوب هو $P(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k)$ وحيث أن

$$P(A_k) = 2^{-5}\, k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$

إذن

$$P(A_1) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_2) = \frac{2}{32} \quad ,$$

$$P(A_3) = \frac{6}{32} \quad , \quad P(A_4) = \frac{24}{32}$$

وحيث أن

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{32} \quad ,$$

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{32} \quad , \quad P(A_2 \cap A_4) = \frac{2}{32} \quad ,$$

$$P(A_1 \cap A_4) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_3 \cap A_4) = \frac{6}{32}$$

وحيث أن

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \qquad \forall \qquad 1 \le i < j < k \le 4$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{1}{32}$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{2}{32}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) = \frac{1}{32}$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$= \frac{1+2+6+24}{32} - \frac{1+1+1+2+2+6}{32} + \frac{1+1+1+2}{32} - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{24}{32}$$

ومن قانون ديمورجان

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)'$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)$$

$$= 1 - \frac{24}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

٤ - فضاء الاحتمال Probability Space

يمكن النظر إلى الاحتمال على انه دالة P مجالها هو مجموعة جميع الأحداث الممكنة من فضاء العينة S للتجربة العشوائية (مجموعة القوى $\rho(S)$) ومداها هو الفـــترة $[0,1]$ أي أن $P : \rho(S) \rightarrow [0,1]$ وبالتالي فإنه لكل حدث A في مجال الدالة يتعـــين عدد p في مدى الدالة $p \in [0,1]$ وهـــذا العـــدد يرافـــق الحـــدث A بحيـــث أن $P(A) = p$ ، وفضاء العينة S مع دالة الاحتمال P يكونان معاً ما يســـمى بفضـــاء الاحتمال ويُرمز له بالزوج المرتب (S,P) . والموضوع الذي يهمنا الآن هو كيفية حســـاب العدد p الذي يرافق الحدث A والذي يُعبر عن احتمال الحدث A ، وحيـــث أن أي حدث A هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S وبالتالي فهو عبارة عن عدد من الأحـــداث الأولية s_i حيث $s_i \in S$ أي أن الحدث A هو اتحاد الأحداث الأولية s_i المكونـــة له وهي أحداث متنافية ووفقا للمسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال فإن احتمال الحدث A هـــو عبارة عن مجموع الأعداد التي ترافق الأحداث الأولية s_i المكونة للحدث A ، وســـوف نوضح الآن كيفية تحديد هذه الأعداد التي ترافق الأحداث الأولية s_i في فضاء العينـــة S وبالتالي هذا سوف يمكننا من حساب احتمال أي حدث من فضاء العينة .

٤-١ : فضاء الاحتمال المنتهي Finite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء منتهي ، مثلا $S = \{ s_1 , s_2 , \ldots , s_n \}$ فإنه يمكـــن في كل مسألة وفقا لظروفها أن نحصل على فضاء احتمال منتهي عن طريق تخصيـــص عـــدد حقيقي p_i لكل حدث أولى $s_i \in S$ وهذا العدد الحقيقي يسمى احتمال s_i أي أن

$$P(\{ s_i \}) = p_i$$

وهذه الأعداد تحقق الخواص الآتية :

١ – جميع الأعداد p_i غير سالبة ، أي أن

$$p_i \geq 0 \quad , \quad \forall\ 0 \leq i \leq n$$

٢ – مجموع الأعداد p_i يساوى الواحد الصحيح ، أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ويكون الاحتمال $P(A)$ للحدث A هو مجموع احتمالات العناصر التي تنتمي إلى A .

مثـــال ١٣ :

نفرض أن فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما هو فضاء منتهى $S = \{ a,b,c,d \}$

وضح أياً من الدوال الآتية تُعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

$$1-\quad P(a)=\frac{1}{2} \;,\; P(b)=\frac{1}{3} \;,\; P(c)=\frac{1}{4} \;,\; P(d)=\frac{1}{5}$$

$$2-\quad P(a)=\frac{1}{2} \;,\; P(b)=\frac{1}{3} \;,\; P(c)=\frac{-1}{3} \;,\; P(d)=\frac{1}{2}$$

$$3-\quad P(a)=\frac{1}{4} \;,\; P(b)=0 \;,\; P(c)=\frac{1}{4} \;,\; P(d)=\frac{1}{2}$$

$$4-\quad P(a)=\frac{1}{12} \;,\; P(b)=\frac{1}{6} \;,\; P(c)=\frac{1}{3} \;,\; P(d)=\frac{5}{12}$$

الحل :

١ – حيث أن مجموع قيم الدالة على عناصر فضاء العينة أكبر من 1

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}>1$$

إذن هذه الدالة لا تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٢ – حيث أن $P(c)=\frac{-1}{3}$ أي أن $P(c)$ عدد سالب ، إذن هذه الدالة لا تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٣ – حيث أن قيم الدالة على عناصر فضاء العينة جميعها غير ســـــالبة ومجموع هذه القيم يساوى 1

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$

إذن هذه الدالة تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٤ – حيث أن قيم الدالة على عناصر فضاء العينة جميعها غير ســـــالبة ومجموع هذه القيم يساوى 1

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=1$$

إذن هذه الدالة تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

مثـــال ١٤ :

يتسابق ثلاثة أشخاص A , B , C في سباق ، فإذا كان احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B واحتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C فأوجد

١ – احتمال فوز كل شخص من الأشخاص الثلاثة .

٢ – احتمال فوز B أو C .

٣ – احتمال عدم فوز A .

الحل :

١ – نفرض أن $P(C) = k$ وحيث أن احتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C ، إذن

$$P(B) = 2\,P(C) = 2k$$

وحيث أن احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B ، إذن

$$P(A) = 2\,P(B) = 2\,(\,2k\,) = 4k$$

ومن المسلمة الثانية لنظرية الاحتمال نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى ١ ، إذن

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad \rightarrow \quad k + 2k + 4k = 1 \quad \rightarrow \quad 7k = 1$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{1}{7}$$

إذن

$$P(A) = 4k = \frac{4}{7} \quad , \quad P(B) = 2k = \frac{2}{7} \quad , \quad P(C) = k = \frac{1}{7}$$

٢ – احتمال فوز B أو C هو $P(\{B,C\})$ ومن التعريف فإن

$$P(\{B,C\}) = P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

٣ – الحدث عدم فوز A هو الحدث فوز B أو C إذن المطلوب هو $P(\{B,C\})$

$P(\{B,C\}) = \frac{3}{7}$ ويمكن أيضاً حساب احتمال عدم فوز A بإيجاد $P(A')$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

مثـــال ١٥:

في أحد المستشفيات وجد أن عدد المرضى في أحد الأيام والذين يترددون على عيادة الأسـنان ثلاثة أمثال الذين يترددون على عيادة الباطنة وضعف الذين يترددون علـى عيـادة الأنـف والأذن والحنجرة وعشرة أمثال الذين يترددون على عيادة مرضى السكر . تم اختيـار أحـد المرضى في هذا اليوم بطريقة عشوائية وبفرض أن أياً من المرضى في هذا اليوم يذهب إلى عيـادة واحدة فقط من هذه العيادات الأربعة . أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص جاء إلى عيـادة الأسنان . أوجد كذلك احتمال أن هذا الشخص جاء إلى أياً من العيادات الأخرى .

الحل : نفرض A هو الحدث أن المريض الذي تم اختياره عشوائياً جاء إلى عيادة الأسـنان ، B هو الحدث انه جاء إلى عيادة الباطنة ، C هو الحدث انه جـاء إلى عيـادة الأنـف والأذن والحنجرة وأن D هو الحدث انه جاء إلى عيادة مرضى السكر . إذن

$$P(A) = 3\,P(B) = 2P(C) = 10P(D)$$

وحيث أن $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ إذن

$$P(A) + \frac{1}{3}\,P(A) + \frac{1}{2}\,P(A) + \frac{1}{10}\,P(A) = 1 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{30}{58}$$

وبالتالي

$$P(B) = \frac{10}{58}\ , \ P(C) = \frac{15}{58}\ , \ P(D) = \frac{3}{58}$$

مثـــال ١٦:

تقدم ثلاثة أشخاص لشغل وظيفة واحدة في أحد الشركات فإذا كانت فرصة الشخص الثـاني للفوز بالوظيفة اكبر من فرصة الأول بنسبة 20% وأقل من فرصة الثـالث بمقـدار 10% أوجد احتمال الفوز لكل من الأشخاص الثلاثة علما بأنه سيتم اختيار شخص منهم للوظيفة .

الحل : نفرض A هو الحدث أن الشخص الأول يفوز بالوظيفـة ، B هـو الحـدث أن الشخص الثاني يفوز بالوظيفة وأن C هو الحدث أن الشخص الثالث يفوز بالوظيفة . إذن

$$P(B)=P(A)+0.2 = P(C)-0.1 \rightarrow P(A) = P(B) - 0.2\ ,\ P(C) = P(B)+0.1$$

وحيث أن $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ إذن

$$P(B) - 0.2 + P(B) + P(B)+0.1 = 1 \ \rightarrow\ 3P(B) = 1.1 \ \rightarrow P(B) = \frac{11}{30}$$

وبالتالي

$$P(A) = \frac{11}{30} - 0.2 = \frac{5}{30}\ , \quad P(C) = \frac{11}{30} + 0.1 = \frac{14}{30}$$

٤ – ٣ : فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم

Equiprobable Finite Probability Space

في بعض الأحيان توجد خواص طبيعية لتجربة عشـوائية ما بحيث أن هذه الخـواص توحي بأن الأحداث الأولية المكونة لفضاء العينة للتجربة تكون جميعها متسـاوية الفرصـة في الحدوث وبالتالي لها نفس الاحتمال ولمثل هذه التجارب فإن فضاء الاحتمال المنتـهى يسـمى بفضاء الاحتمال المنتهى المنتظم وصفة الانتظام هنا تعنى أن جميع عناصر فضاء العينة متسـاوية في احتمال حدوثها .

نظرية ٨ :

إذا كان فضاء العينة S لتجربة عشـوائية ما يحتوي علـى n مـن الأحـداث الأوليـة المتساوية في الاحتمال فإن احتـمال أي حدث أولي يساوي $\frac{1}{n}$.

البرهان :

نفرض أن فضاء العينة $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ حيث جميع العناصر s_i متسـاوية الفرصة في الحدوث وبالتالي لها نفس الاحتمال ، أي أن

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \ldots = P(\{s_n\})$$

وحيث أن $\{s_1\}, \{s_2\} \ldots \{s_n\}$ أحداث متنافية اتحادها هـو S ، إذن باسـتخدام المسلمة الثانية والثالثة لنظرية الاحتمال

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{s_i\}) = n\,P(\{s_1\})$$

إذن $P(\{s_1\}) = \frac{1}{n}$ وبالتالي نحصل على

$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{n} \qquad \forall \; 1 \le i \le n$$

أي أن احتـمال أي حدث أولي يساوي $\frac{1}{n}$.

وفي فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم إذا كان A حدث ما عدد عناصره $n(A)$ فـإن النظريـة الآتية تقدم لنا صيغة لحساب احتمال الحدث A .

نظرية ٩ :

إذا كان فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما يحتوي على n من الأحداث الأولية المتساوية في الاحتمال وكان A حدث من S عدد عناصره $n(A)$ فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

البرهان :

نفرض أن فضاء العينة $S = \{ s_1 , s_2 , \ldots , s_n \}$ حيث جميع العناصر s_i متساوية الفرصة في الحدوث ، إذن من النظرية السابقة $\forall \ 1 \le i \le n \quad P(\{s_i\}) = \frac{1}{n}$.

نفرض الحدث $A = \{ s_{i_1} , s_{i_2} , \ldots , s_{i_{n(A)}} \}$

حيث $s_{i_j} \in S \quad \forall \ 1 \le j \le n(A)$ وبالتالي $P(\{s_{i_j}\}) = \frac{1}{n} \quad \forall \ 1 \le j \le n(A)$

وحيث أن $\{s_{i_1}\} , \{s_{i_2}\} \ \ldots \ \{s_{i_{n(A)}}\}$ أحداث متنافية اتحادها هو A ، إذن باستخدام المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n(A)} \{s_{i_j}\} \right) = \sum_{j=1}^{n(A)} P\left(\{s_{i_j}\}\right) = n(A) \times P\left(\{s_{i_1}\}\right)$$

وبالتالي نحصل على $P(A) = \frac{n(A)}{n}$.

إذن النظرية السابقة تخبرنا أنه في فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم إذا كان A حدث ما عدد عناصره $n(A)$ فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

وبصورة أخرى :

$$P(A) = \frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث } A}{\text{عدد طرق وقوع فضاء العينة } S}$$

وهذه الصيغة للاحتمال لا تستخدم إلا في حالة فضاء العينة المنتهى المنتظم ، وتاريخيا فإن هـــذه الصيغة للاحتمال كانت تستخدم كتعريف للاحتمال وذلك حتى تم إدخال التعريف الريـــاضي للاحتمال باستخدام المسلمات بواسطة العالم A . N . Kolmogorov في عـــام 1933 وهذه الصيغة تعرف الآن بالتعريف الكلاسيكي للاحتمال كما سبق وأوضحنا في البنـــد الأول من هذا الفصل وسوف نستخدم التعبير " بطريقة عشوائية " فقط في حالة فضاء العينة المنتظـــم فمثلا العبارة " اختيار نقطة بطريقة عشوائية من S أو سحب عنصر بطريقة عشوائية من S " تعنى أن S فضاء عينة منتظم أي أن جميع عناصر S متســـاوية في احتمال حدوثها .

مثـــال ١٧ :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فإن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كان A هـــو الحدث ظهور عدد زوجي فـــإن

$$A = \{2,4,6\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وإذا كان B هو الحدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3 فـــإن

$$B = \{3,6\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثـــال ١٨ :

في تجربة سحب ورقة بطريقة عشوائية من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة " إذا كان A هو الحدث ظهور صورة ولد فإن $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ وذلك لان عدد أوراق الكوتشينة يساوى 52 ورقة وعدد الأوراق التي تحمل صورة ولد يساوى 4 أوراق وإذا كان B هـــو الحدث ظهور عدد زوجي فإن B يعنى ظهور عدد من مجموعة الأعـداد $\{2,4,6,8,10\}$ وحيث أن كل عدد يوجد في الكوتشينة في أربعة أوراق ، إذن $P(B) = \frac{20}{52}$

مثـــال ١٩ :

في تجربة سحب كرة من صندوق يحتوى على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 4 كـــرات سوداء فإن عدد عناصر فضاء العينة يساوى 12 وهو عدد الكرات في الصندوق فـــإذا كان A هو الحدث سحب كرة بيضاء فإن $P(A) = \frac{3}{12}$ وإذا كان B هو الحدث ســحب كرة حمراء فإن $P(B) = \frac{5}{12}$.

مثـــال ٢٠ :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي أوجد

١ – احتمال ظهور الصورة مرتين فقط .

٢ – احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .

٣ – احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

٤ – احتمال ظهور الصورة مرتين على الأكثر .

٥ – احتمال عدم ظهور الصورة .

الحل :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينـــة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

وعدد عناصره يساوى 8 .

١ – نفرض الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين فقط ، إذن

$$A_1 = \{HHT, HTH, THH\} \quad , \quad P(A_1) = \frac{3}{8}$$

٢ – نفرض الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، إذن

$$A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\} \quad , \quad P(A_2) = \frac{7}{8}$$

٣ – نفرض الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر ، إذن

$$A_3 = \{HTT, THT, TTH, TTT\} \quad , \quad P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

٤ – نفرض الحدث A_4 ظهور الصورة مرتين على الأكثر ، إذن

$$A_4 = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \quad , \quad P(A_4) = \frac{7}{8}$$

٥ – نفرض الحدث A_5 عدم ظهور الصورة ، إذن

$$A_5 = \{TTT\} \quad , \quad P(A_5) = \frac{1}{8}$$

مثــال ٢١ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي لملاحظة ظـــهور الصـــورة ، إذا كـــان الحدث A_i هو ظهور الصورة i من المرات حيث $0 \le i \le 4$.

١ - أوجد $P(A_i)$ لكل $0 \le i \le 4$.

٢ - إذا كان فضاء العينة S' للتجربة هو عدد مرات ظهور الصورة فهل (S', P) يمثـــل فضاء احتمال ؟

الحل :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي فإن فضاء العينة S يكون

$$S = \{ HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT \}$$

الأحداث A_i حيث $0 \le i \le 4$ تكون

$$A_0 = \{ TTTT \}$$

$$A_1 = \{ HTTT, THTT, TTHT, TTTH \}$$

$$A_2 = \{ HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH \}$$

$$A_3 = \{ HHHT, HHTH, HTHH, THHH \}$$

$$A_4 = \{ HHHH \}$$

١ - الاحتمالات $P(A_i)$ تكون كالآتي :

$P(A_0)$	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P(A_4)$
$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

٢ - إذا كان فضاء العينة S' للتجربة هو عدد مرات ظهور الصورة فإن $S' = \{0,1,2,3,4\}$ حيث الحدث الأولي ظهور i يعنى الحدث A_i وبالتالي $P(A_i) = P(i)$ لكـل $0 \le i \le 4$ وحيث أن $P(A_i) > 0$ لكل $0 \le i \le 4$ وكذلك

$$\sum_{i=0}^{4} P(A_i) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

إذن (S', P) يمثل فضاء احتمال .

مثـــال٢٢ : في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين أوجـــد :

١ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوي 10 .

٢ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 9 .

٣ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 2 .

٤ – احتمال ظهور الرقم 3 .

وفى حالة ما إذا كان حجري النرد متزنين ومتماثلين هل سيكون هناك اختلاف عند حساب الاحتمالات السابقة ؟

الحل : في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين فإن فضاء العينـــة يحتوى على 36 عنصر كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال



	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

١ – نفرض أن A هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين يساوي 10 . إذن

$$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

$$n(A) = 3 \quad , \quad n = 36 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

٢ – نفرض أن B هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 9

$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6),(6,4),(6,5)\} \rightarrow \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

٣ – نفرض أن C هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 2

$$C = \{(1,1)\}' \quad \rightarrow \quad P(C) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

٤ – نفرض الحدث D ظهور الرقم 3 ، إذن

$$D = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

$$P(D) = \frac{11}{36}$$

وفى حالة ما إذا كان حجري النرد متماثلين فإنه لن يكون هناك معنى للقول أن العدد ظهر من الحجر الأول أو ظهر من الحجر الثاني فمثلا ظهور العددين 5 , 2 نعبر عنه بزوج واحد أما (2,5) أو (5,2) وليس كليهما وذلك لان حجري النرد متماثلين وبالتالي فإن فضاء العينة يحتوى على 21 عنصر فقط كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2	(2,1)	(2,2)				
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)			
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)		
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

إذن الاحتمالات السابقة تصبح كالآتي :

١ - الحدث A مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين يساوي 10 يصبح

$$A = \{(5,5),(6,4)\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{21}$$

٢ - الحدث B مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 9 يصبح

$$B = \{(5,5),(6,6),(6,4),(6,5)\} \rightarrow P(B) = \frac{4}{21}$$

٣ - الحدث C مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 2 يصبح

$$C = \{(1,1)\}' \rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

٤ - الحدث D ظهور الرقم 3 يصبح

$$D = \{(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2)\} \rightarrow P(D) = \frac{6}{21}$$

مثـــال ٢٣ :

نفرض مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ فإذا تم اختيار عـــدد بطريقـــة عشوائية من هذه المجموعة فأوجد

١ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 3 .

٢ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 5 .

٣ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 3 أو 5 .

٤ – احتمال أن العدد لا يقبل القسمة على 15 .

الحل : فضاء العينة $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ وعدد عناصره $n = 100$

١ – نفرض الحدث A أن العدد يقبل القسمة على 3 ، إذن $A = \{3m : 1 \le m \le 33\}$

وعدد عناصر الحدث A هو $n(A) = 33$ ، وبالتالي

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{33}{100} = 0.33$$

٢ – نفرض الحدث B أن العدد يقبل القسمة على 5 ، إذن $B = \{5m : 1 \le m \le 20\}$

وعدد عناصر الحدث B هو $n(B) = 20$ ، وبالتالي

$$P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{20}{100} = 0.2$$

٣ – الحدث أن العدد يقبل القسمة على 3 أو 5 هو الحدث $A \cup B$ وعدد عناصره

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وحيث أن الحدث $A \cap B$ هو الحدث أن يكون العدد يقبل القسمة على 3 و 5 معـــا ،

أي يقبل القسمة على 15 إذن

$$A \cap B = \{15m : 1 \le m \le 6\} \rightarrow n(A \cap B) = 6$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = 33 + 20 - 6 = 47$$

وبالتالي فإن احتمال الحدث $A \cup B$ يكون $P(A \cup B) = \frac{47}{100} = 0.47$

٤ – الحدث أن العدد لا يقبل القسمة على 15 هو $(A \cap B)'$ ، إذن

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{6}{100} = 0.94$$

مثـــال ٢٤ :

أختير عدد عشوائيا من مجموعة الأعداد $\{999, \ldots, 101, 100\}$.

١ – أوجد احتمال أن هذا العدد يحتوى على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل .

٢ – أوجد احتمال أن هذا العدد يحتوى على الرقم 3 مرتين بالضبط .

الحل :

فضاء العينة S يكون

$$S = \{100,101, \ldots ,999\} \quad , \quad n(S) = 900$$

١ – نفرض الحدث A أن العدد الذي تم اختياره عشوائيا يحتوى على الرقم 1 مرة واحـــدة على الأقل ، أي أن الرقم 1 يظهر مرة واحدة على الأقل في خانة الآحـــاد أو العشـــرات أو المئات . إذن $P(A) = 1 - P(A')$ حيث A' هو مكملة الحدث A وهو يمثل عـــدم ظهور الرقم 1 في أيا من خانات الآحاد أو العشرات أو المئات . وحيث أنه من مجموعة الأرقـام $9, \ldots, 1, 0$ وعددها عشرة فإن عدم ظهور الرقم 1 في خانة الآحاد يتم بطرق عددها 9 وعدم ظهور الرقم 1 في خانة العشرات يتم بطرق عددها 9 وعدم ظهور الرقـــم 1 في خانـــة المئات يتم بطرق عددها 8 فقط لأننا نستبعد الرقم 0 أيضا حيث أن مجموعة الأعـــداد الـــتي نختار منها تبدأ من 100 . إذن عدد طرق وقوع الحدث A' يكون $8\times9\times9$ وبالتـــالي

$$P(A') = \frac{8\times9\times9}{900} = 0.72$$ إذن .

$$P(A) = 1 - 0.72 = 0.28$$

٢ – نفرض الحدث B أن العدد الذي تم اختياره عشوائيا يحتوى علـــى الرقـــم 3 مرتـــين بالضبط ، أي أن الحدث B يشمل أعداد على الصورة $33x$, $3x3$, $x33$ حيـــث الرقم x في خانة الآحاد أو العشرات يمكن أن يكون أي رقم من 0 إلى 9 ما عـــدا الرقـــم 3 ويتم ذلك بطرق عددها 9 بينما الرقم x في خانة المئات يمكن أن يكون أي رقم مـــن 0 إلى 9 ما عدا 0 أو 3 ويتم ذلك بطرق عددها 8 . ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد عناصر الحـدث B يكون $n(B) = 9 + 9 + 8 = 26$ وبالتالي فإن

$$P(B) = \frac{26}{900} = 0.029$$

مثـــال ٢٥ :

اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$ أوجد احتمـــال أن هذا العدد مع العدد 63 يكونا عددين أولين بالنسبة إلى بعضهما .

الحل :

نعلم أن العددين يقال انهما أولين بالنسبة إلى بعضهما إذا كان القاسم المشترك الموجب لهمـــا هو 1 فقط . وحيث أن قواسم العدد 63 هي 21 , 9 , 7 , 3 والقواسم المختلفة هما 7 , 3 لذلك نفرض الحدث A أن العدد يقبل القسمة على 3 وبالتالي

$$A = \{3m : 1 \le m \le 21\}$$

وعدد عناصر الحدث A هو $n(A) = 21$. إذن $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{21}{63}$ ونفـــرض الحدث B أن العدد يقبل القسمة على 7 ، وبالتالي $B = \{7m : 1 \le m \le 9\}$ وعــــدد عناصر الحدث B هو $n(B) = 9$ ، إذن $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{9}{63}$ وحيث أن الحـدث $A \cup B$ هو أن العدد يقبل القسمة على أيا من قواسم 63 على الأقل . إذن الحـدث أن العدد يكون أولي بالنسبة إلى 63 هو $(A \cup B)'$ ويكـــون المطلـــوب هـــو حســـاب $P(A \cup B)'$. الحـــدث أن العـــدد يقبـــل القســــمة علـــى 3 أو 7 هـــو الحدث $A \cup B$ وعدد عناصره

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وحيث أن الحدث $A \cap B$ هو أن يكون العدد يقبل القسمة على 3 و 7 معا ، أي يقبل القسمة على 21 إذن

$$A \cap B = \{21m : 1 \le m \le 3\} \rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 9 - 3 = 27$$

إذن $P(A \cup B) = \frac{27}{63}$ وبالتالي نحصل على المطلوب

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{27}{63} = \frac{36}{63}$$

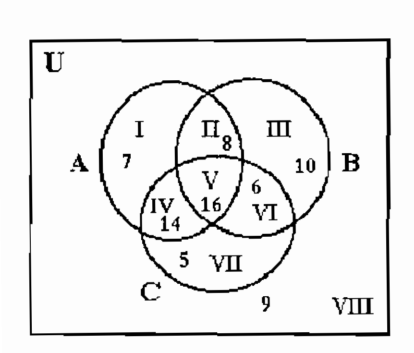
مثال ٢٦ : في مجموعة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طـــالب يدرســـون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغـــة الإنجليزيـــة ، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرســـون اللغة الإنجليزية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد ما يأتي :

(١) – احتمال أن الطالب يدرس الرياضيات .

(٢) – احتمال أن الطالب يدرس الرياضيات أو اللغة الإنجليزية ولا يدرس الفيزياء .

(٣) – احتمال أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

الحل : نفرض الحدث A هو اختيار طالب يدرس مقرر الرياضيات ، الحدث B هو اختيـلو طالب يدرس مقرر الفيزياء والحدث C هو اختيار طالب يدرس مقـــرر اللغـــة الإنجليزيـــة . الأحداث الثلاث A , B , C يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن ، ومن المفضل أن نبدأ مـــع البيانات الأكثر وضوحا والتي يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذي ننطلق منه لإكمال باقي البيانات داخل الشكل ، وفي هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحـــا هي الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلـــة لتقاطع الأحداث الثلاث $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العـــدد 16 في المنطقة V ثم نكمل باقي المناطق كما هو موضح بشكل فن الآتي :



(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات

$7 + 8+14+16 = 45$ وبالتالي $P(A) = \frac{45}{75}$

(٢) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيـلت أو الإنجليزية ولا يدرس الفيزياء هو $(A \cup C) \cap B'$

وعدد عناصره يساوى $7+14 + 5 = 26$

وبالتالي $P((A \cup C) \cap B') = \frac{26}{75}$

(٣) –الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث هـــو $(A \cup B \cup C)'$ وعـــدد عناصره يساوى 9 وبالتالي $P(A \cup B \cup C)' = \frac{9}{75}$.

مثـــال ٢٧ :

في استطلاع بين عينة من الطلاب عن الألعاب التي يلعبونها وجد أن 25% يلعبـــون كـــرة القدم ، 20% يلعبون كرة السلة ، 13% يلعبون العاب القوى ، 10% يلعبون كـــرة القدم وكرة السلة ، 8% يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 5% يلعبـــون كـــرة الســـلة والعاب القوى ، 4% يلعبون الألعاب الثلاثة ، تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من العينة . أوجد احتمال ان هذا الطالب لا يلعب أيا من الألعاب الثلاثة .

الحل: نفرض الحدث A هو اختيار طالب يلعب كرة القدم ، الحدث B هو اختيار طالب يلعب كرة السلة والحدث C هو اختيار طالب يلعب العاب القوى . إذن

$$P(A)=0.25 \quad , \quad P(B)=0.2 \quad , \quad P(C)=0.13 \quad , \quad P(A\cap B)=0.1$$
$$P(A\cap C)=0.08 \quad , \quad P(B\cap C)=0.05 \quad , \quad P(A\cap B\cap C)=0.04$$

الحدث أن الطالب لا يلعب أيا من الألعاب الثلاثة هو $(A\cup B\cup C)'$ ، وحيث أن

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=0.25+0.2+0.13-0.1-0.08-0.05+0.04=0.39$$

إذن $P((A\cup B\cup C)')=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.39=0.61$

مثـــال ٢٨:

أحد الطلاب سئل زملائه في الفصل عن نتائجهم في مقررات الرياضيات والفيزياء والكيميـــاء وقام برصد هذه البيانات كالآتي : 78% نجحوا في الرياضيات ، 80% نجحوا في الفيزيـــاء ، 84% نجحوا في الكيمياء ، 60% نجحوا في الرياضيات والفيزيـــاء ، 65% نجحـــوا في الفيزياء والكيمياء ، 70% نجحوا في الرياضيات والكيمياء ، 55% نجحـــوا في المقـــررات الثلاثة . وضح أن هذه النسب غير متوافقة وبالتالي هناك خطأ في عملية الرصد .

الحل : نفرض الحدث A هو النجاح في الرياضيات ، الحدث B هو النجاح في الفيزيـــاء والحدث C هو النجاح في الكيمياء . إذن

$$P(A)=0.78 \quad , \quad P(B)=0.8 \quad , \quad P(C)=0.84 \quad , \quad P(A\cap B)=0.6$$
$$P(A\cap C)=0.7 \quad , \quad P(B\cap C)=0.65 \quad , \quad P(A\cap B\cap C)=0.55$$
$$P(A\cup B\cup C)=0.78+0.8+0.84-0.6-0.7-0.65+0.55 \doteq 1.02>1$$

إذن هناك خطأ في عملية الرصد لان دالة الاحتمال دائما اقل من أو تساوى 1 .

مثـــال ٢٩ :

اختبار من ثلاثة أسئلة كل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F فإذا كانت الإجابة على الأسئلة الثلاثة تتم بالتخمين فأوجد

١ – احتمال الإجابة صواب على سؤالين على الأقل .

٢ – احتمال الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار يكون

$$S = \{ TTT , TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

وعدد عناصره $n = 8$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثال (٢٠) بالفصل الأول

١ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأقل هو

$\{ TTT, TTF, TFT , FTT \}$ واحتماله يساوى $\frac{1}{2}$.

٢ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر هو

$\{ TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, FFF \}$ واحتماله يساوى $\frac{7}{8}$.

مثـــال ٣٠ :

كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى . أوجد احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

الحل : نفرض أن A , B يرمزان إلى قطعتي النقود العاديتين ، C ترمز إلى قطعة النقـــود ذات الصورتين ، إذن فضاء العينة S الذي يمثل جميع النواتج الممكنة للتجربة يكون

$$S = \{ AHH , AHT , ATBH , ATBT , ATCH , BHH , BHT , BTAH , BTAT , BTCH , CHH \}$$

وعدد عناصره $n = 11$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثال(٢٣) بالفصل الأول والحدث ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر هو

$$\{ AHT , ATBH , ATBT , ATCH, BHT , BTAH , BTAT , BTCH \}$$

وعدد عناصره 8 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{8}{11}$.

مثـــال ٣١ :

في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتـــاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة ، أوجد احتمال أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة

$$S = \{ AA , ABAA , ABABA , ABABB , ABB , BAA , BABAA , BABAB , BABB , BB \}$$

وعدد عناصره n = 10 ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثـل(٢٤) بالفصل الأول والحدث E أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط عدد عناصره 4

$$E = \{ ABABA, ABABB, BABAA, BABAB \} \quad , \quad P(E) = \frac{4}{10} = 0.4$$

مثـــال ٣٢ :

في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من المجموعات الثلاث الآتية

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز L	غرفتين T	الطابق الأول A
جناح متوسط K	ثلاث غرف F	الطابق الثاني B
		الطابق الثالث C

أتصل أحد الأشخاص لحجز أحد الأجنحة . أوجد كل مما يأتي :

١ – احتمال حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث . ٢ – احتمال حجز جناح من غرفتين .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع الاختيارات الممكنة لحجز الأجنحة

$$S = \{ LTA , LTB , LTC , LFA , LFB , LFC , KTA , KTB , KTC , KFA , KFB , KFC \}$$

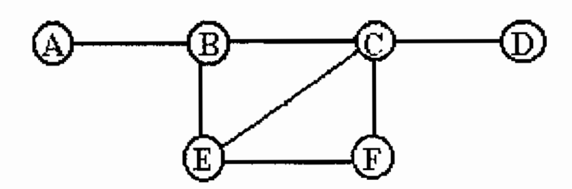
وعدد عناصره n = 12 ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية

١– الحدث حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث هو { LTC , LFC } وعدد عنـــاصره 2 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

٢– الحدث حجز جناح من غرفتين هو { LTA, LTB , LTC, KTA, KTB, KTC } وعدد عناصره 6 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

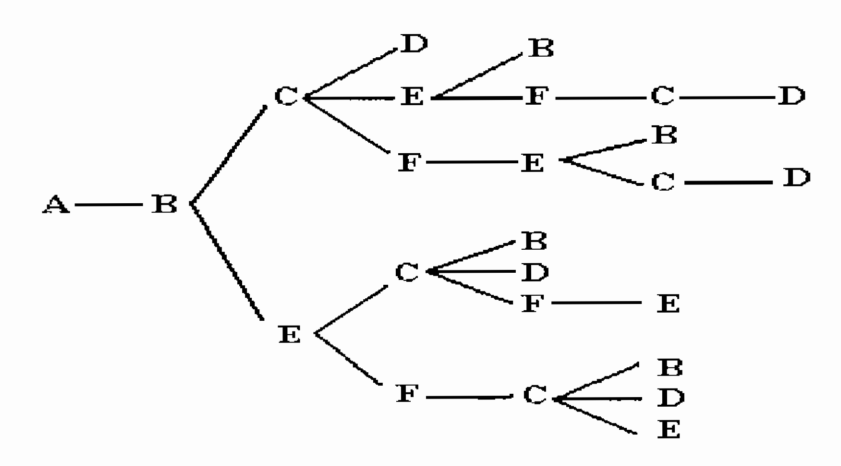
مثــال ٣٣ :

النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل علـــى



جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعــتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجــد احتمال انه سيتوقف للاستراحة في المدينة B .

الحل : نكون الشجرة البيانية للتجربة



نلاحظ أنه توجد 11 طريقة يمكن للرجل أن يتجول بها حتى يصل إلى جسر مر عليه من قبــل ويكون مضطر للعبور عليه مرة ثانية وبالتالي يأخذ استراحة ،كما نلاحظ من الشجرة في النقاط النهائية أنه يجب أن يتوقف للاستراحة في أحد المدن B أو D أو E . إذن فضاء العينة

S = { ABCD, ABCEB, ABCEFCD, ABCFEB, ABCFECD, ABECB, ABECD, ABECFE, ABEFCB, ABEFCD, ABEFCE}

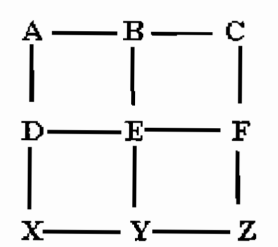
والحدث أن الرجل سيتوقف للاستراحة في المدينة B هو

{ ABCEB , ABCFEB , ABECB , ABEFCB }

واحتماله يساوي $\frac{4}{11}$.

مثـــال ٣٤:

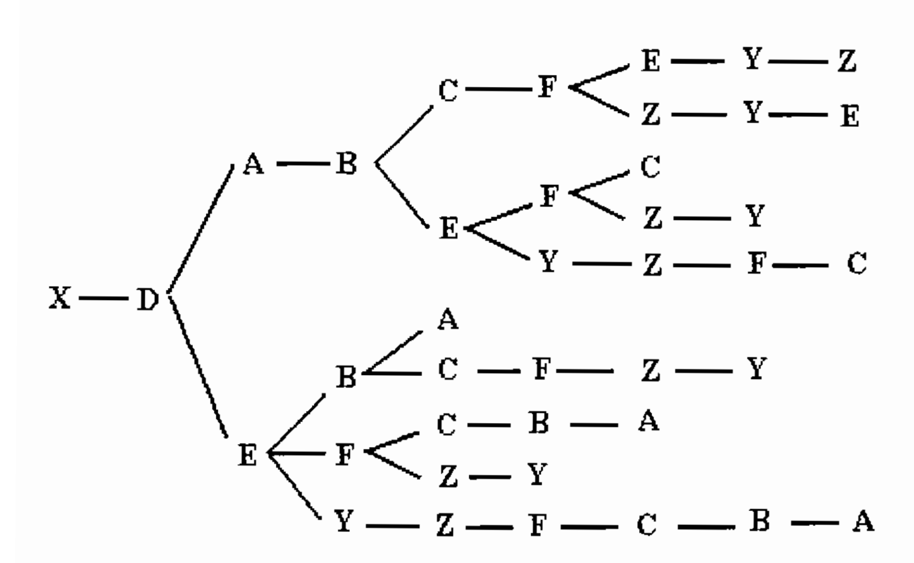
في الرسم الآتي تسعة نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بدأ رجل في التحرك مـــن



النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأسية أو خطوة أفقية ويتوقف عن الحركـــة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قد مر بها من قبل . أوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D .

الحل :

نكون الشجرة البيانية للتجربة



نلاحظ أنه توجد 10 رحلات مختلفة أي أن فضاء العينة به 10 عناصر ونلاحظ انه توجـــد فقط 4 رحلات منها تمر بجميع النقاط وهى

{ XDABCFEYZ , XDABCFZYE , XDABEYZFC , XDEYZFCBA }

إذن احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D يساوى $\frac{4}{10}$.

مثـــال ٣٥ :

في دراسة تهتم بنوع وعمر الأطفال في العائلات في مدينة القاهرة تم اختيـــار عائلـــة بطريقـــة عشوائية من مجموعة العائلات التي لديها ثلاثة أطفال ، أوجد كل مما يأتي :

١ – احتمال عدم وجود ولد في العائلة .

٢ – احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة .

٣ – احتمال وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٤ – احتمال أن المولود الثاني بنت .

٥ – احتمال أن عدد الأولاد اكبر من عدد البنات في العائلة .

الحل :

مع مراعاة الترتيب في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

وعدد عناصره 8 حيث الرمز b يعنى ولدا والرمز g يعنى بنتا .

١ – الحدث A_1 عدم وجود ولد للعائلة هو

$A_1 = \{ggg\}$ واحتماله $P(A_1) = \frac{1}{8}$.

٢ – الحدث A_2 وجود ولد واحد على الأقل في العائلة هو

$A_2 = \{ bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb \}$ واحتماله $P(A_2) = \frac{7}{8}$.

٣ – الحدث A_3 وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة هو

$A_3 = \{ bgg , gbg , ggb \}$ واحتماله $P(A_3) = \frac{3}{8}$.

٤ – الحدث A_4 أن المولود الثاني بنت هو

$A_4 = \{ bgb , bgg , ggb , ggg \}$ واحتماله $P(A_4) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

٥ – الحدث A_5 أن عدد الأولاد اكبر من عدد البنات في العائلة هو

$A_5 = \{ bbb , bbg , bgb , gbb \}$ واحتماله $P(A_5) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

مثـــال ٣٦ :

في مصعد أحد العمارات ركب شخصان ، فإذا كان المصعد يتوقف في الطابق الثاني والثـــالث والرابع وبفرض أن خروج أيا من الشخصين إلى أيا من الطوابق الثلاث متســـاوي الفرصـــة فأوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن الشخصين يتركان المصعد في طابقين مختلفين .

٢ – احتمال أن الشخصين يصعدان إلى نفس الطابق .

٣– احتمال أن أحد الشخصين على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع .

الحل :

نفرض أن a , b يرمزان إلى الشخصين وان a_i تعنى أن الشخص a يترك المصعـــد في الطابق رقم i حيث $2 \le i \le 4$ وان b_j تعنى أن الشـــخص b يـــترك المصعـــد في الطابق رقم j حيث $2 \le j \le 4$. إذن فضاء العينة يكون

$$S = \{ a_i \, b_j \}_{i,j=2}^{4}$$

$$= \{a_2 b_2 , a_2 b_3 , a_2 b_4 , a_3 b_2 , a_3 b_3 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 , a_4 b_4\}$$

١ – نفرض الحدث A أن الشخصين يتركان المصعد في طابقين مختلفين ، إذن

$$A = \{ a_2 b_3 , a_2 b_4 , a_3 b_2 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 \} ,$$

$$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

٢ – نفرض الحدث B أن الشخصين يصعدان إلى نفس الطابق ، إذن

$$B = \{ a_2 b_2 , a_3 b_3 , a_4 b_4 \} ,$$

$$P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

٣ – نفرض الحدث C أن أحد الشخصين على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع ، إذن

$$C = \{ a_2 b_4 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 , a_4 b_4\} ,$$

$$P(C) = \frac{5}{9}$$

مثـــال ٣٧ :

إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $x^2 + b\,x + c = 0$ يتم تعيينها عـــن طريــق إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثـــل المعـــامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل العدد c .

١ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

الحل :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي فإن فضاء العينـــة S يحتوى على 36 عنصــر كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ومن المعلوم أن المعادلة التربيعية $x^2 + b\,x + c = 0$ لها جذران هما

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ ومميز المعادلة $b^2 - 4c$ يحدد نوع الجذران .

١ – نفرض الحدث A أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان ، أي أن $b^2 - 4c > 0$.

إذن الحدث A هو مجموعة الأزواج المرتبة (b , c) من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 > 4c$ ، أي أن $A = \{(b,c) \in S \ : \ b^2 > 4c\}$. إذن

$$A = \{ (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

وعدد عناصر الحدث A هو $n(A) = 17$ وبالتالي احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{17}{36}$$

٢ – نفرض الحدث B أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان ، أي أن $b^2 = 4c$.

إذن الحدث B هو مجموعة الأزواج المرتبة (b, c) من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 = 4c$ ، أي أن $B = \left\{(b,c) \in S \;:\; b^2 = 4c\right\}$ ، وبالتالي

$$B = \{(2,1), (4,4)\} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

٣ – نفرض الحدث C أن يكون للمعادلة جذران مركبان ، أي أن $b^2 - 4c < 0$.

إذن الحدث C هو مجموعة الأزواج المرتبة (b, c) من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 < 4c$ ، أي أن $C = \left\{(b,c) \in S \;:\; b^2 < 4c\right\}$ ، وبالتالي

$$\begin{aligned} C = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ & (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3) \\ & (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6) \} \end{aligned}$$

وعدد عناصر الحدث C هو $n(C) = 17$ واحتمال الحدث C يكون

$$P(C) = \frac{17}{36}$$

مثـــال ٣٨ :

امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – Choice يحتوى على 10 أسـئلة ولكـل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقط صحيحة ، أراد أحد الطلاب الإجابة على كـل أسـئلة الامتحان بالتخمين .

١ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان .

٢ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان .

٣ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في نصف أسئلة الامتحان .

الحل :

حيث أن عدد أسئلة الامتحان 10 ولكل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقـط صحيحـة ، إذن يمكن الإجابة على أي سؤال بطرق عددها 4 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عـدد طرق الإجابة على أسئلة الامتحان العشرة وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة يكون

$$4^{10} = 1048576$$

١ – نفرض الحدث A أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان و يتحقق هـذا إذا اختار الطالب الاختيار الصواب في كل سؤال وهذا يتم بطريقة واحدة فقـط وبتطبيـق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار الإجابة الصواب في أسئلة الامتحان العشرة يكون طريقة واحدة فقط وبالتالي عدد عناصر الحدث A يساوى 1 . إذن

$$P(A) = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1048576} = 9.53674 \times 10^{-7}$$

٢ – نفرض الحدث B أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان و يتحقق هذا إذا اختار الطالب إجابته على كل سؤال من الاختيارات الثلاث الخطأ ، أي انه يسـتبعد دائمـا الاختيار الصواب وبالتالي يمكن الإجابة خطأ على كل سؤال بطرق عددها 3 وبتطبيق القـاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة خطأ في جميع الأسئلة يكون $3^{10} = 59049$. إذن

$$P(B) = \frac{3^{10}}{4^{10}} = \frac{59049}{1048576} = 0.0563$$

٣ – نفرض الحدث C أن تكون إجابة الطالب صواب على نصف الأسئلة ويتحقق ذلـك إذا اختار الطالب الإجابة الصواب في خمسة أسئلة وعدد طرق اختيار الإجابة صواب في كل منـها هو طريقة واحدة فقط والأسئلة الخمسة الباقية يتم الإجابة على كل منها خطأ بطرق عددها 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة صواب على نصف الأسـئلة يكـون $3^5 = 243$. إذن

$$P(C) = \frac{243}{4^{10}} = \frac{243}{1048576} = 0.0002$$

ملاحظة هامة : النتائج التي حصلنا عليها في المثال السابق تعتبر خير شاهد ودليـل علـى أن أسلوب التخمين في الإجابة في امتحانات الاختيار من متعدد دائما ما تؤدى إلى الفشل .

مثـــال ٣٩ :

إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربيـة يتبعهما عدد من أربعة أرقام بحيث لا يكون رقم الآلاف صفر .أوجد احتمال أن تكون اللوحـة المعدنية التي ستحصل عليها لسيارتك تبدأ بحرف ب وتحمل عدد زوجي .

الحل :

مواضع الحروف والأرقام وعدد طرق كتابتها على اللوحة المعدنية للسيارة يكون كالآتي

مواضع الحروف الأبجدية		مواضع الأرقـــام العدديـــــــة			
الموضع الأول	الموضع الثاني	رقم الآحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الآلاف
28	27	10	10	10	9

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن طبعها للسيارات والذي يمثـــل عـــدد عناصر فضاء العينة يساوى

$$28 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 6804000$$

وبفرض أن الحدث A أن تكون اللوحة المعدنية تبدأ بحرف ب وتحمل عدد زوجي أي أن رقــم الآحاد يكون زوجي $\{0,2,4,6,8\}$ وفى هذه الحالة فإن مواضع الحروف والأرقام وعــــدد طرق كتابتها على اللوحة المعدنية لرقم السيارة يكون كالآتي

مواضع الحروف الأبجدية		مواضع الأرقـــام العدديـــــــة			
الموضع الأول	الموضع الثاني	رقم الآحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الآلاف
1	27	5	10	10	9

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن طبعها للسيارات في هذه الحالة والذي يمثل عدد عناصر الحدث A يساوى

$$1 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 5 = 121500$$

إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{121500}{6804000} = 0.0179$$

مثـــال ٤٠ :

ذهب أحد الأشخاص للتعاقد على إدخال تليفون إلى منزله فإذا علمت أن المنطقة التي يســكن بها هذا الشخص يبدأ فيها رقم التليفون من أقصى اليسار بالعدد 63 وإذا كان رقم التليفـون يتكون من سبعة أرقام فما هو احتمال أن يكون رقم تليفون هذا الشخص سوف يشتمل علــى ثلاثة على الأقل من الأصفار المتجاورة .

الحل :

حيث أن رقم التليفون يبدأ من أقصى اليسار بالعدد 63 فإن عدد طرق كتابة كل من الخانــة الأولي والثانية يكون طريقة واحدة أما الخانات الخمس الأخرى فإن عدد طرق كتابة كــل منها يكون 10 طرق وبالتالي يكون عدد أرقام التليفونات المختلفة التي يمكن التعاقد عليـــها والذي يمثل عدد عناصر فضاء العينة يساوى

$$1\times1\times10\times10\times10\times10\times10 = 100000$$

وبفرض الحدث A أن يكون رقم تليفون هذا الشخص يشتمل على ثلاثة على الأقــل مــن الأصفار المتجاورة فهذا يعنى أن رقم التليفون قد يشتمل على ثلاثة أصفار متجاورة أو أربعــة أصفار متجاورة أو خمسة أصفار متجاورة ويتم ذلك كالآتي :

ثلاثة أصفار متجاورة		أربعة أصفار متجاورة		خمسة أصفار	
تمثيل الرقم	عدد الطرق	تمثيل الرقم	عدد الطرق	تمثيل الرقم	عدد الطرق
63000??	9x10=90	630000?	9	6300000	1
63?000?	9x9=81	63?0000	9		
63??000	10x9=90				

وبتطبيق قاعدة الجمع فإن عدد عناصر الحدث A يكون

$$90 + 81 + 90 + 9 + 9 + 1 = 280$$

إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{280}{100000} = 0.0028$$

مثـــال ٤١: ثلاثة أولاد وثلاثة بنات يتجهون نحو صف به ستة مقاعد للجلوس عليها

١ – أوجد احتمال أن يجلس الأولاد معا والبنات معا .

٢ – أوجد احتمال أن تجلس البنات معا .

الحل : عدد طرق جلوس 6 أشخاص على 6 مقاعد يكون $6!=720$

١ – نفرض الحدث A أن يجلس الأولاد معا والبنات معا . يوجد طريقتان لجلـــوس الأولاد معا وجلوس البنات معا gggbbb , bbbggg حيث الرمز b يعنى ولـــدا والرمـــز g يعنى بنتا وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا معا بطرق عددها $3!$ ويمكـــن للبنـــات أن تجلسن معا بطرق عددها $3!$.إذن وفقا لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكـــون $3!\times3! = 36$ وبجمع الحالتين وفقا لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون 72 ، إذن

$$P(A) = \frac{72}{720} = 0.1$$

٢ – نفرض الحدث B أن يجلس البنات معا . نلاحظ انه يوجد أربع طرق لجلوس البنات معا

bbbggg , bbgggb , bgggbb , gggbbb

وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا معا بطرق عددها $3!$ ويمكن للبنات أن تجلسن معـــا بطرق عددها $3!$ ووفقا لقاعدة الضرب فـــإن عـــدد الطـــرق في كـــل حالـــة يكـــون $3!\times3! = 36$ وبجمع الحالات الأربعة فإن عدد الطرق الكلية يكون 144 وبالتالي

$$P(B) = \frac{144}{720} = 0.2$$

مثـــال ٤٢ : نفرض مجموعة الأرقام { 1,3,5,7,9 } وبفرض عدم السماح بالتكرار فقـــد تم اختيار ثلاثة أرقام بطريقة عشوائية لتكوين عدد من ثلاث خانات . أحسب ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون قيمة العدد اقل من 600 .

٢ – احتمال أن تكون قيمة العدد مضاعف للعدد 5 .

الحل : عدد الأرقام في المجموعة المعطاة يساوى 5 وغير مسموح بالتكرار وبالتالي فإن الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يتم اختيارها بطرق عددها $_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$

١ – نفرض الحدث A أن تكون قيمة العدد اقل من 600 أي أن خانة المئات مسموح أن يوضع فيها الرقم 1 أو الرقم 3 أو الرقم 5 وبالتالي فإن خانة المئات يمكن أن تمـــلأ بطـــرق عددها 3 ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار وبعد حجز رقم لخانة المئات فإن خانة العشـــرات

تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة الآحاد تملأ بطرق عددها 3 وبذلك فإن عدد عناصر الحدث A يساوى $3\times4\times3=36$ وبالتالي نحصل على $P(A)=\frac{36}{60}=0.6$.

٢- نفرض الحدث B أن تكون قيمة العدد مضاعف 5 أي أن رقم الآحاد يجب أن يقبل القسمة على 5 . وحيث أن الاختيار يكون من مجموعة الأرقام { 1,3,5,7,9 } . إذن رقم الآحاد يكون 5 أي أن خانة الآحاد تملأ بطريقة واحدة فقط ونظرا لأنه غير مسموح بالتكرار فإن خانة المئات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة العشرات تملأ بطرق عددها 3 وبذلك فإن عدد عناصر الحدث B يساوى $4\times3\times1=12$ وبالتالي نحصل على $P(B)=\frac{12}{60}=0.2$.

مثال ٤٣: اخترنا خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 20 , . . . ,2, 1} أوجد احتمال

١ -أن اصغر عدد من الأعداد الخمسة يكون أكبر من 8 .

٢ -أن أكبر عدد من الأعداد الخمسة يكون اصغر من 17 واصغر عدد منهم أكبر من 6 .

الحل :مجموعة الأعداد { 20 , . . . , 2 , 1 } تحتوى على 20 عنصر وعدد طرق اختيار خمسة أعداد من 20 يساوى

$$\binom{20}{5}=\frac{20!}{(5!)\times(15!)}=15504$$

١ - نفرض الحدث A هو أن اصغر عدد من الأعداد الخمسة يكون أكبر من 8 . إذن الحدث A هو اختيار خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 20 , . . . , 10 , 9 } وعدد عناصر الحدث A هو 12 وبالتالي عدد طرق وقوع الحدث A والذي يعنى عدد طرق اختيار خمسة أعداد من 12 يساوى $\binom{12}{5}=\frac{12!}{(5!)\times(7!)}=792$. إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A)=\frac{792}{15504}=\frac{33}{646}$$

٢ - نفرض الحدث B هو أن أكبر عدد من الأعداد الخمسة يكون اصغر من 17 واصغر عدد منهم يكون أكبر من 6 . إذن الحدث B هو اختيار خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 16 , . . . , 8 , 7 } وعدد عناصر الحدث B هو 10 وبالتالي عدد طرق وقوع الحدث B والذي يعنى عدد طرق اختيار خمسة أعداد من 10 يساوى

$$\binom{10}{5}=\frac{10!}{(5!)\times(5!)}=252$$. إذن $P(B)=\frac{252}{15504}=\frac{21}{1292}$.

مثـــال ٤٤ :

يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خـــط مستقيم واحد .

١ – إذا رسم مستقيم عشوائيا يربط بين نقطتين من هذه النقاط ، أوجد احتمـــــال أن هـــذا المستقيم لا يمر بالنقطة (x_1 , y_1) أو (x_2 , y_2) .

٢ – إذا رسم مثلث عشوائيا يربط بين ثلاثة من هذه النقاط ، أوجد احتمال أن هذا المثلـــث يحتوى النقطة (x_1 , y_1) كرأس فيه .

٣ – إذا رسم مثلث عشوائيا يربط بين ثلاثة من هذه النقاط ، أوجد احتمال أن هذا المثلـــث يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين $(x_n , y_n) , (x_1 , y_1)$.

الحل :

١ – حيث أن النقاط عددها n ولا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد وحيـــث أن المستقيم يتحدد بنقطتين ، إذن عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط يكـــون هو عدد طرق اختيار نقطتين من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{2}$ ولإيجـــاد عـــدد المستقيمات التي لا تمر بالنقطة (x_1 , y_1) أو (x_2 , y_2) نستبعد النقطتـــين فيكـــون لدينا n - 2 من النقاط نختار منهم نقطتين ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-2}{2}$.

وبالتالي فإن احتمال أن هذا المستقيم لا يمر بالنقطتين (x_1 , y_1) أو (x_2 , y_2) يساوى

$$\frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

٢ – حيث أن المثلث له ثلاثة رؤوس ، إذن عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط يكـون هو عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{3}$ ولإيجاد عدد المثلثـــات التي تحوى النقطة (x_1 , y_1) كرأس فيها فإننا نحجز هذه النقطة كرأس للمثلـــث فيتبقـــى

لدينا $n-1$ من النقاط نختار منها نقطتين كرأسين آخرين للمثلث ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-1}{2}$ وبالتالي فإن احتمال أن هذا المثلث يحتوى النقطة (x_1,y_1) كرأس فيه يساوى

$$\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n}$$

٣ – لإيجاد عدد المثلثات التي يكون فيها الخط الواصل بين النقطتين (x_n,y_n) , (x_1,y_1) هو أحد أضلاعها وبمعنى آخر لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطتين (x_n,y_n) , (x_1,y_1) كرأسين للمثلث فإننا نحجز هاتين النقطتين ، وبالتالي يتبقى $n-2$ من النقاط نختار منها نقطة واحدة لتمثل الرأس الثالث ويكون ذلك بطرق عددها $n-2$ وحيث أن عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط يساوى $\binom{n}{3}$ وبالتالي فإن احتمال أن هذا المثلث يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين (x_n,y_n) , (x_1,y_1) يساوى

$$\frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{6}{n(n-1)}$$

<u>مثال ٤٥:</u>

بحيرة صغيرة بها 200 سمكة دخلت 50 منها إلى شبكة صياد ثم خرجت نتيجة لوجود عيب بالشبكة ، وبعد إصلاح العيب بالشبكة تم اصطياد 40 سمكة من البحيرة . أوجد احتمال أن يكون من بين ما تم اصطياده في المرة الثانية يوجد 5 سمكات بالضبط سبق دخولها وخروجها من الشبكة في المرة الأولي .

<u>الحل</u>: عدد السمك بالبحيرة 200 سمكة منها 50 اكتسبت صفة أنها سبق لها دخول الشبكة والخروج منها ، وحيث انه في المرة الثانية تم اصطياد 40 سمكة من أجمالي 200 في البحيرة فإن عدد طرق اختيار 40 سمكة من 200 يكون $\binom{200}{40}$ وبفرض أن A هو الحدث وجود 5 سمكات بالضبط سبق دخولها وخروجها في المرة الأولي فإن هذا يعنى أن الحدث A هو اصطياد 5 سمكات من الخمسين التي اكتسبت صفة أنها سبق لها دخول الشبكة واصطياد

35 سمكة من الباقي وعددهم 150 وعدد طرق وقوع الحدث A يكـون $\binom{50}{5}\times\binom{150}{35}$

وبالتالي فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A)=\frac{\binom{50}{5}\times\binom{150}{35}}{\binom{200}{40}}$$

$$=\frac{50!}{(5!)\times(45!)}\times\frac{150!}{(35!)\times(115!)}\times\frac{(40!)\times(160!)}{200!}=0.0195351$$

مثـــال ٤٦ :

في مزرعة ما يوجد 50 رأس من الغنم 5 منها مصابة بجرثومة الحمى . إذا اخترنا 5 أغنـــام بشكل عشوائي من القطيع ، أوجـــد

١ – احتمال أن تكون الأغنام الخمسة غير حاملة للجرثومـــة .

٢ – احتمال أن تكون 2 من الأغنام المختـــارة مصابة بالمرض .

٣ – احتمال أن تكون واحدة منها على الأقل تحمل جرثومة المرض .

٤ – إذا علمت أنه تم استبعاد اثنتين من الأغنام المصابة بالمرض ، ثم اخترنا 5 أغنام من باقي القطيع بطريقة عشوائية ، فما احتمال وجود إصابة واحدة ؟

الحل : عدد طرق اختيار 5 أغنام من 50 وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة للتجربة يكون

$$\binom{50}{5}=2118760$$

١ – عدد طرق اختيار 5 أغنام سليمة من 45 هو $\binom{45}{5}=1221759$

إذن الاحتمال p أن تكون الأغنام الخمسة سليمة يكون

$$p=\frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}}=\frac{1221759}{2118760}=0.5766$$

٢ – الاحتمال p أن تكون 2 من الأغنام المختـــارة مصابة بالمرض

$$p = \frac{\binom{5}{2}\times\binom{45}{3}}{\binom{50}{5}} = \frac{141900}{2118760} = 0.067$$

٣ – الاحتمال p أن تكون واحدة من الأغنام على الأقل تحمل جرثومة المرض هو

p = P (2 مصابة) + P (3 مصابة) + P (4 مصابة) + P (5 مصابة)

$$= \frac{\binom{5}{2}\times\binom{45}{3}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{5}{3}\times\binom{45}{2}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{5}{4}\times\binom{45}{1}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{5}{5}\times\binom{45}{0}}{\binom{50}{2}}$$

$$= 0.4234$$

وكان من الممكن حساب الاحتمال المطلوب فى (٣) كالآتي :

الحدث أن تكون واحدة على الأقل من الأغنام الخمسة مصابة هو مكملة الحدث أن تكـــون الخمسة أغنام ســـليمة وبفرض أن A هو الحدث اختيار 5 أغنام سليمة ، إذن

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0.5766 = 0.4234$$

٤ – بعد استبعاد اثنتين من الأغنام المصابة بالمرض يصبح عدد رؤوس الغنم بالقطيع ٤٨ منها ٣ مصابة .
إذن الاحتمال p لوجود إصابة واحدة هو

عدد الأغنام 48	
45 سليمة	3 مصابة

$$p = \frac{\binom{3}{1}\times\binom{45}{4}}{\binom{48}{5}} = \frac{446985}{1712304} = 0.261$$

مثـــال ٤٧ :

صندوق يحتوى على ١٥ مصباح كهربائي منها خمسة مصابيح معيبة ، اختيرت عينة عشـــوائية تتكون من ثلاثة مصابيح كهربائية . أوجد احتمال ما يأتي :

١ – أن يكون في العينة مصباح واحد معيب .

٢ – أن تكون المصابيح في العينة جميعها سليمة .

٣ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل معيب .

عدد المصابيح 15	
10 سليمة	5 معيبة

الحل :

١ – نفرض A هو الحدث انه يوجد في العينة مصباح واحد معيب ، إذن

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\times\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

٢ – نفرض B هو الحدث أن المصابيح في العينة جميعها سليمة ، إذن .

$$P(B) = \frac{\binom{5}{0}\times\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

٣ – نفرض C هو الحدث أنه يوجد في العينة مصباح واحد على الأقل معيب

وحيث أن الحدث يوجد في العينة مصباح واحد على الأقل معيب هو مكملة الحـــدث أن المصابيح في العينة جميعها سليمة ، إذن الحدث C هو مكملة الحدث B وبالتالي

$$P(C) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثـال ٤٨ :

يراد اختيار لجنة طلابية مؤلفة من 5 طلاب من بين 10 طلاب من الفرقة الرابعة و 15 طـالب من الفرقة الثالثة في الكلية . أوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تحتوي اللجنة على طالبين من الفرقة الرابعة وثلاثة طلاب من الفرقة الثالثة .

٢ – احتمال أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة .

٣ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الثالثـة والرابعـة ممثلين في اللجنة .

٤ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الرابعـة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة .

الحل :

عدد الطلاب بالعينة 25 طالبا ، وعدد طرق اختيار 5 طلاب من بين 25 يكون $\binom{25}{5}$ وهذا يمثل عدد عناصر فضاء العينة .

١ – الحدث أن تحتوي اللجنة على طالبين من الفرقة الرابعة وثلاثة طلاب من الفرقة الثالثة يتم بطرق عددها $\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}$ واحتماله p يكون

$$p = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{20475}{53130} = \frac{195}{506}$$

٢ – الحدث أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة هو مكملة الحـدث اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الرابعة وبفرض أن B هو الحدث اختيار جميع أعضـاء اللجنة من الفرقة الرابعة ، إذن الحدث أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثـل في اللجنة هو B' وبالتالي

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{\binom{15}{0} \times \binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} = 1 - \frac{252}{53130} = 1 - \frac{6}{1265} = \frac{1259}{1265}$$

٣ – نفرض الحدث A أن طلاب الفرقة الثالثـة والرابعـة ممثلين في اللجنة ، ولكي يتحقق ذلك فإننا نستبعد الحدث B أن يكون اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الرابعة فقط أو الحدث C أن يكون اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الثالثة فقط ، أي أن

$$P(A) = 1 - P(B \cup C)$$

وحيث أن B , C أحداث متنافية . إذن

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{\binom{15}{0}\times\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{5}\times\binom{10}{0}}{\binom{25}{5}} = \frac{6}{1265} + \frac{33}{1265} = \frac{39}{1265}$$

إذن الاحتمال المطلوب

$$P(A) = 1 - \frac{39}{1265} = \frac{1226}{1265}$$

٤ – نفرض الحدث A أن يكون طلاب الفرقة الرابعـة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة وهـذا يتحقق في كل من الأحداث الآتية :

الحدث A_1 أن تحتوي اللجنة على خمسة طلاب من الفرقة الرابعة أو

الحدث A_2 أن تحتوي اللجنة على أربعة طلاب من الفرقة الرابعة وطالب واحد من الثالثة أو

الحدث A_3 أن تحتوي اللجنة على ثلاثة طلاب من الفرقة الرابعة وطالبين من الفرقة الثالثة ،

وحيث أن $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ والأحداث A_1 , A_2 , A_3 متنافية ، إذن

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{\binom{15}{0}\times\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{1}\times\binom{10}{4}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{2}\times\binom{10}{3}}{\binom{25}{5}}$$

$$= \frac{252}{53130} + \frac{3150}{53130} + \frac{12600}{53130} = \frac{2667}{8855}$$

مثـــال ٤٩ :

من بين 4 رجال و 5 نساء يراد تكوين لجنة عشوائيا مؤلفة من 3 أشخاص .

١ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة .

٢ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة .

الحل : عدد طرق اختيار 3 أشخاص من 9 أشخاص وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة هو

$$\binom{9}{3} = \frac{9\,!}{(3\,!)\times(6\,!)} = 84$$

١ – نفرض الحدث A أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة ، إذن عدد عناصر الحدث A يكون $\binom{4}{2}\times\binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$ وبالتالي $P(A) = \frac{30}{84}$.

٢ – نفرض الحدث B أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة ، إذن عدد عناصر B يساوى $\binom{3}{1}\times\binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$

وبالتالي $P(B) = \frac{15}{84}$.

مثـــال ٥٠ :

يقف في أحد الحجرات ستة رجال مع زوجاتهم فإذا اختير أربعة أشـــخاص منـــهم بطريقـــة عشوائية فما احتمال عدم اختيار أي اثنين متزوجين .

الحل : عدد الأشخاص بالحجرة 12 وبالتالي فإن عدد طرق اختيار أربعة أشخاص مـــن بـــين 12 شخص يكون $\binom{12}{4} = 495$ وبفرض أن الحدث A هو اختيار أربعة أشخاص بحيـــث لا يوجد بينهم أي اثنين متزوجين وحيث انه يقف بالحجرة 6 ثنائيات فإن الحدث A يقع بـــأن يتم اختيار أربعة أشخاص من أربعة ثنائيات مختلفة وهذا يحدث بطـــرق عددهـــا $\binom{6}{4} = 15$ وحيث انه يوجد طريقتان لاختيار فرد من كل ثنائي من الثنائيات الأربعة ، ووفقـــا لقـــاعدة الضرب فإن عدد طرق وقوع الحدث يكون $2\times2\times2\times2\times15 = 240$ وبالتالي فـــإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{240}{495} = \frac{16}{33}$$

مثـــال ٥١ :

من بين 8 رجال وزوجاهم تم اختيار شخصين بطريقة عشوائية . أوجد احتمال كل من

١ – اختيار رجل وزوجته .　　　　　٣ – اختيار رجل وسيدة .

٢– اختيار رجل وسيدة ليست زوجته .　　　　　٤ – اختيار رجلين أو سيدتين .

الحل : حيث أن عدد الأشخاص يساوى 16 لأهم 8 رجال وزوجاهم ، إذن عـــدد طـــرق اختيار شخصين من 16 وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة هو

$$\binom{16}{2} = \frac{16\ !}{(2\ !) \times (14\ !)} = 120$$

١– نفرض الحدث A هو اختيار رجل وزوجته وبالتالي يمثل اختيار زوج من ثمانية أزواج ويتم ذلك بطرق عددها $\binom{8}{1} = 8$ وبالتالي $P(A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

٢– نفرض الحدث B هو اختيار رجل وسيدة ليست زوجته . إذن

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{7}{15}$$

٣– نفرض الحدث C هو اختيار رجل وسيدة . إذن

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{8}{15}$$

٤– نفرض الحدث E_1 هو اختيار رجلين والحدث E_2 هو اختيار سيدتين وهـــم حدثـــين متنافيين ، إذن الحدث اختيار رجلين أو سيدتين هو $E_1 \cup E_2$ وبالتالي

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{28}{120} + \frac{28}{120} = \frac{7}{15}$$

مثـــال ٥٢ :

صندوق يحتوى على 9 كرات بيضاء ، 6 كرات سوداء ، 5 كرات حمراء ونريـــد ســـحب مجموعة من ثلاث كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع

١ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء .

٢ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان .

٣ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون .

الحل :

حيث أن عدد الكرات بالصندوق يساوى 20 ، إذن عدد طرق سحب ثلاث كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع يكون

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{(3!) \times (17!)} = 1140$$

١ – عدد طرق سحب كرتين بيضاء وكرة سوداء يكون

$$\binom{9}{2} \times \binom{6}{1} = 36 \times 6 = 216$$

إذن احتمال اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء يكون $\frac{216}{1140}$.

٢ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بأن نختار كرة من كل لون ويتم ذلـــك بطرق عددها

$$\binom{9}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = 9 \times 6 \times 5 = 270$$

واحتمال ذلك يساوي $\frac{270}{1140}$.

٣ – الحدث اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون هو مكملة الحدث اختيار مجموعـــة من 3 كرات مختلفة الألوان واحتمال ذلك يكون $1 - \frac{270}{1140} = \frac{87}{114}$

مثـــال ٥٣ :

سحبت كرتان من صندوق يحتوي على 4 كرات بيضاء وكرتان حمراء . أوجد احتمال ما يأتي

١ – الكرتان بيضـــاء ٢ – الكرتان من نفس اللون ٣ – على الأقل واحدة بيضاء .

وذلك في كل من الحالات الآتية :

أولا : السحب بإرجاع .

ثانيا :السحب بدون إرجاع .

الحل :

نفرض أن A هو الحدث الكرتان بيضـــاء ، B هو الحدث الكرتان حمراء

أولا : في حالة السحب بإرجـــاع

١ – احتمال أن الكرتان بيضـــاء $P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{4}{9}$

٢ – الحدث الكرتان من نفس اللون يعنى الحدث A الكرتان من اللون الأبيض أو الحدث B الكرتان من اللون الأحمر ، أي انه الحدث $A\cup B$ وحيث أن A, B أحداث متنافية ، إذن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ وحيث أن

$$P(B)=\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{9} \quad , \quad P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{4}{9}$$

إذن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

٣ – الحدث على الأقل واحدة بيضاء هو مكملة الحدث أن الكرتان حمراء ، إذن احتمال على الأقل واحدة بيضاء يكون

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

ثانيا : في حالة السحب بدون إرجاع

$$1-\quad P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

$$2-\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\left(\frac{2}{5}\right)+\left[\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{7}{15}$$

$$3-\quad P(B')=1-P(B)=1-\left[\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

مثـــال ٥٤ :

سحبت ورقتان بطريقة عشـــوائية من صندوق يحتوى على 10 ورقات مرقمة بالأعداد مـــن 1 إلى 10 . أوجد احتمال أن يكون مجموعها عددا زوجيا

١ – إذا تم سحب الورقتين معا .

٢ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

الحل :

نفرض أن A هو الحدث سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعهما عددا زوجيا

١ – إذا تم سحب الورقتين معا .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات هو

$$\binom{10}{2} = \frac{(10!)}{(2!)\times(8!)} = 45$$

وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعـــهما عـــددا زوجيـــا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انه يوجد 5 أعداد زوجية و 5 أعداد فردية ، إذن

عدد طرق سحب عددين زوجيين يكون

$$\binom{5}{2}\times\binom{5}{0} = \frac{5!}{(2!)\times(3!)}\times 1 = 10$$

وعدد طرق سحب عددين فرديين

$$\binom{5}{0}\times\binom{5}{2} = 1\times\frac{5!}{(2!)\times(3!)} = 10$$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق وقوع الحدث A يكون $10 + 10 = 20$

إذن

$$P(A) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

٢ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات بحيث يتم السحب ورقة بعد الأخرى بدون إحـــلال هو $10 \times 9 = 90$ وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعهما عددا زوجيا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انه يوجـد 5 أعداد زوجية و 5 أعداد فردية . إذن

عدد طرق سحب عددين زوجين يكون $5 \times 4 = 20$

عدد طرق سحب عددين فردين يكون $5 \times 4 = 20$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق حدوث الحدث A يكون $20 + 20 = 40$

إذن

$$P(A) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

٣ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات بحيث يتم السحب ورقة بعد الأخرى مع الإحـــلال هو $10 \times 10 = 100$ وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعـــهما عددا زوجيا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انـــه يوجد 5 أعداد زوجية ، 5 أعداد فردية . أذن

عدد طرق اختيار عددين زوجين يكون $5 \times 5 = 25$

عدد طرق اختيار عددين فردين يكون $5 \times 5 = 25$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق حدوث الحدث A يكون $25 + 25 = 50$

إذن

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

مثـــال ٥٥ : (المسألة الكلاسيكية لأعياد الميلاد)

في هذا المثال سوف نتناول تجربة تحديد أعياد الميلاد لعدد n من الأشخاص ، ونبحـــث عـــن الاحتمال p أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لهؤلاء الأشخاص ، وبفرض أن جميع الســـنوات 365 يوما وإذا أخذنا في الاعتبار أن يوم الميلاد لأي شخص منهم يمكن أن يكون أي يـــوم في السنة وأن كل يوم من أيام السنة له نفس الاحتمال في أن يكون يوم الميلاد لشخص ما فـــإن عدد عناصر فضاء العينـــة S للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديـــد أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S) = (365)^n$$

وبفرض أن الحدث A هو أن أيام أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص مختلفة ، إذن

يمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الأول بطرق عددها 365

ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثاني بطرق عددها 364

ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثالث بطرق عددها 363

وهكذا حتى نصل إلى إمكانية اختيار يوم عيد الميلاد للشخص رقم n بطرق عددها

$$(365 - n + 1)$$

إذن عدد عناصر الحدث A ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أيام أعياد ميـــلاد مختلفـــة لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(A) = 365 \times 364 \times 363 \times \quad \ldots \quad \times (365 - n + 1)$$

إذن الاحتمال p أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لمجموعة بها n من الأشخاص

$$p = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{365 \times 364 \times 363 \times \quad \ldots \quad \times (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

وبصيغة أخرى فإن p يمثل احتمال عدم وجود أي اثنان من n من الأشخاص لهم نفس يـــوم الميلاد ، إذن احتمال وجود شخصين على الأقل من مجموعة من n من الأشخاص ويكـــون لهما نفس يوم الميلاد يكون $1 - p$.

وفى الجدول الآتي نحسب احتمال وجود شخصين على الأقل من مجموعة تحتوى على n مـــن الأشخاص ويكون لهما نفس يوم الميلاد وذلك لبعض قيم n وقيمة هذا الاحتمـال 1 – p حيث p تعطى من القانون

$$p = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

عدد الأشخاص n	احتمال وجود شخصين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد
5	0.0271356
10	0.116948
15	0.252901
20	0.411438
22	0.475695
23	0.507297
25	0.5687
30	0.706316
50	0.970374
60	0.994123
80	0.999914
95	0.999999

ومن الجدول نلاحظ انه لقيم $n \geq 23$ فإن احتمال وجود شخصين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد يكون اكبر من 0.5 أي أن الاحتمال يكون اكبر من 50% وبالتـــالي يمكننـــا القول انه في أي مجموعة تحتوى على 23 شخص أو اكثر فإنه من المرجح أن يكون هناك اثنان على الأقل منهم لهما نفس يوم الميلاد .

وفى دراسة الاحتمالات والإحصاء تعتبر مسألة أعياد الميلاد من المسائل الشهيرة منذ عـــام 1939 وذلك نظرا لان القيم العددية التي نحصل عليها عند حل هذا النوع من المسائل يــكون غالبا مثير للدهشة وربما تكون النتيجة السابقة والتي تخبرنا انه في أي مجموعة تحتوى علـــى 23 شخص أو اكثر فإنه من المرجح أن يكون هناك اثنان على الأقل منهم لهما نفس يـــوم الميـــلاد تعتبر من النتائج المثيرة للدهشة .

مثـــال ٥٦ :

اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ أوجـــد احتمال أن العدد يحتوى على الرقم 5 مرة واحدة على الأقل ضمن خاناته .

الحل : مجموعة الأعداد بالصورة $\{0001, 0002, 0003, \ldots, 9999, 10000\}$

ونفرض الحدث A_i هو أن العدد يحتوى على الرقم 5 في الخانة رقم i حيث $1 \le i \le 4$

إذن الحدث أن العدد يحتوى على الرقم 5 مرة واحدة على الأقـــل ضمـــن خاناتـــه يكـــون $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ولحساب احتماله نستخدم القانون

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

وحيث أن كل خانة يمكن أن تملأ بطرق عددها 10 وهى الأرقام من 0 إلى 9 ، إذن

$$P(A_i) = \frac{1}{10} \qquad \forall \quad 1 \le i \le 4$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \qquad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \qquad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{10000}$$

نلاحظ انه يوجد $\binom{4}{1}$ من الحدود بالصورة $P(A_i)$ ويوجد $\binom{4}{2}$ من الحدود بـــالصورة $P(A_i \cap A_j)$ ويوجد $\binom{4}{3}$ من الحدود بالصورة $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ ويوجد $\binom{4}{4}$ من الحدود على الصورة $P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$ وبالتعويض نحصل على

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \binom{4}{1} \times \frac{1}{10} - \binom{4}{2} \times \frac{1}{100} + \binom{4}{3} \times \frac{1}{1000} - \binom{4}{4} \times \frac{1}{10000} = 0.3439$$

مثــال ٥٧ :

كتب أحد الأشخاص n من الخطابات الشخصية إلى n من الأصدقاء ووضع كل خطاب في ظرف بريد وأغلقه بدون كتابة العناوين ثم بدء بعد ذلك بطريقة عشوائية في كتابة n من العناوين على هذه المظاريف . أوجد احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط .

الحل :

عدد طرق كتابة n من العناوين على n من المظاريف يساوى $n!$ وهذا يمثل عدد عناصر فضاء العينة ، ونفرض الحدث A_i هو أن الخطاب رقم i تم كتابة العنوان عليه مضبوط . إذن الحدث وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط يكون $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ولحساب احتماله نستخدم القانون

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

وحيث انه عند كتابة العنوان مضبوط على الخطاب رقم i فإنه يتبقى $(n - 1)$ من الخطابات وعدد طرق كتابة العناوين على هذه الخطابات المتبقية يساوى $(n-1)!$ أي أن عدد عناصر الحدث A_i يساوى $(n-1)!$ وبالتالي فإن $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$. وبالمثل $A_i \cap A_j$ يمثل الحدث كتابة العنوان مضبوط على كل من الخطاب رقم i والخطاب رقم j وبالتالي يتبقى $(n - 2)$ من الخطابات وعدد طرق كتابة العناوين على هذه الخطابات المتبقية يساوى $(n-2)!$ أي أن عدد عناصر الحدث $A_i \cap A_j$ يساوى $(n-2)!$ وبالتالي فإن $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$. وبالمثل $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$ وهكذا حتى $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$. والآن عند حساب $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$

نلاحظ انه يوجد $\binom{n}{1}$ من الحدود على الصورة $P(A_i)$ ويوجد $\binom{n}{2}$ من الحدود على الصورة $P(A_i \cap A_j)$ ويوجد $\binom{n}{3}$ من الحدود على الصورة $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ وهكذا إلى $\binom{n}{n}$ من الحدود على الصورة $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ وبـــالتعويض نحصل على

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \binom{n}{1} \times \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \times \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$+ \binom{n}{3} \times \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n-1} \times \binom{n}{n} \times \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

ملاحظة :

نعلم أن مفكوك الدالة الآسية $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ وبالتالي عندما $n \to \infty$ فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots$$

$$= 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots \right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$\cong 0.632$$

وفى الجدول الآتي نحسب احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتــوب عليــه العنــوان مضبوط من مجموعة تحتوى على n من الخطابات لبعض قيم n وذلك باستخدام الكومبيوتر حيث تم الحساب بدقة عشرة خانات عشرية ، وقيمة هذا الاحتمال تعطى من القانون

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط	عدد الخطابات n
1.0	1
0.5	2
0.6666666667	3
0.625	4
0.6333333333	5
0.6319444444	6
0.6321428571	7
0.6321180556	8
0.6321208113	9
0.6321205357	10
0.6321205608	11
0.6321205587	12
0.6321205588	13
0.6321205588	14
0.6321205588	15
0.6321205588	50
0.6321205588	100
0.6321205588	1000
0.6321205588	2000

أي انه حتى وأن كان عدد الخطابات كبير جدا في هذا المثال فانه توجد فرصة جيــدة تصــل إلى 63 % لان يكون واحد على الأقل من هذه الخطابات قد كتب عليه العنوان مضبــوط ويلاحظ أننا حصلنا على هذه النسبة 63 % بدأ من n = 5 كما انه بدأ من n = 13 فإن قيمة الاحتمال تكون ثابتة لعشرة خانات عشرية وهذه تعتبر من النتائج المثيرة للدهشة .

٤ - ٣ : فضاء الاحتمال اللانهائي القابل للعد

Countable Infinite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء لا نهائي قابل للعد ، مثلا $S = \{ s_1 , s_2 , \ldots \}$ فإنه كما في حالة فضاء الاحتمال المنتهى يمكن الحصول على فضاء احتمال عن طريق تخصيص عدد حقيقي p_i لكل حدث أولي $s_i \in S$ وهذا العدد الحقيقي يسمى احتمال s_i وهذه الأعداد تحقق الخواص الآتية :

$$1) - \quad p_i \geq 0 \quad , \quad \forall\ i$$

$$2) - \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

ويكون الاحتمال $P(A)$ للحدث A هو مجموع احتمالات العناصر التي تنتمي إلى A .

مثال ٥٨ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون $S = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ حيث الرمز ∞ يمثل حالة عدم ظهور الصورة على الإطلاق على الرغم من إلقاء قطعة النقود عدد لانهائي من المرات ، وفى هذه التجربة فإن فضاء العينة يكون لا نهائي قابل للعد وكل حدث أولي في S يمثل عدد مرات إلقاء العملة المعدنية حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة ، ويمكن الحصول على فضاء احتمال بالتخصيص التالي

$$P(1) = \frac{1}{2} \ , \ P(2) = \frac{1}{2^2} \ , \ \ldots \ , P(n) = \frac{1}{2^n} \ , \ P(\infty) = 0$$

وهذه الأعداد تمثل متتابعة هندسية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

وبفرض أن A هو الحدث ظهور الصورة لأول مرة بعد الرمية الخامسة على الأقل فإن هذا يعنى انه قد تظهر الصورة لأول مرة في الرمية السادسة أو السابعة أو ... وهكذا . إذن

$$P(A) = \sum_{n=6}^{\infty} P(n) = 1 - \sum_{n=1}^{5} P(n) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) = \frac{1}{2^5}$$

٤ - ٤ : فضاء الاحتمال المنتظم اللانهائي الغير قابل للعد

Equi-probable Uncountable Infinite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء لا نهائي غير قابل للعد فإنه لا يمكن تخصيص عددا حقيقيا لكل عنصر s_i ولكن عندما يكون هناك مقياس هندسي محدود m (S) لفضاء العينة S فإنه لكل حدث A يتم حساب هذا المقياس الهندسي m (A) وهذا المقياس الهندسي المحدود قد يكون الطول أو العرض أو المساحة أو الحجم وبشرط أن يتم اختيار النقاط فيه بطريقة عشوائية وبالتالي يصبح احتمال الحدث A ، أي احتمال أن تنتمي النقطة المختارة إلى A ، هو خارج قسمة المقياسين كالآتي

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

وفضاء العينة اللانهائي مع دالة الاحتمال P في هذه الحالة يسمى بفضاء الاحتمال المنتظم اللانهائي الغير قابل للعد ، وصفة الانتظام هنا تعني أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية في احتمال حدوثها .

مثال ٥٩ :

تم اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة [1,9] . ما احتمال أن تقع هذه النقطة بين العددين 3 , 5 ؟

الحل :

نفرض أن الحدث A هو وقوع النقطة بين 3 , 5 . فضاء العينة S هو الفترة [1,9] والمقياس الهندسي المحدود هو الطول ، أي أن m (S) يمثل طول الفترة [1,9] أي البعد بين العددين 1 , 9 وأيضا m (A) يمثل البعد بين العددين 3 , 5 وبالتالي

$$m(S) = 9-1 = 8 \qquad , \qquad m(A) = 5-3 = 2$$

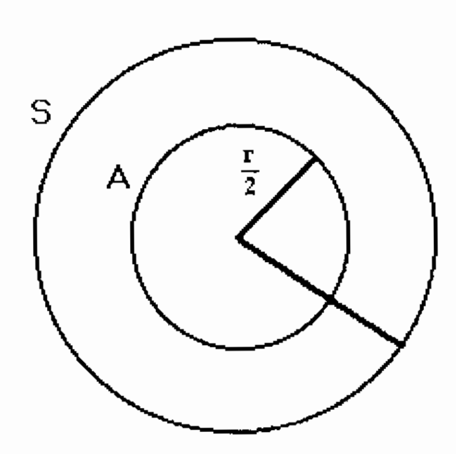
إذن

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٦٠ :

اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة ، أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركـــز الدائرة منها إلى محيط الدائرة .

الحل :



نفرض أن S تمثل مجموعة النقاط داخل دائرة نصف قطرها r ونفرض أن A تمثل مجموعة النقاط داخل الدائرة المشـــتركة معها في المركز ونصف قطرهـا $\frac{r}{2}$. إذن A تمثـــل نقـــاط الدائرة الداخلية التي تكون اقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائـــرة الخارجيـــة S ، والمقياس الهندسي المحدود هو المساحة ، أي أن

$m(S)$ يمثل مساحة الدائرة الخارجية S

وأيضا

$m(A)$ يمثل مساحة الدائرة الداخلية A

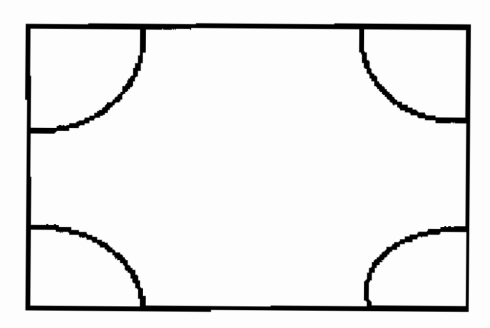
إذن الاحتمال p أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة هو

$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٦١ :

مستطيل طوله 8 cm وعرضه 6 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المســـــتطيل ، أوجد احتمال أن تكون النقطـــة أقرب بمقدار 2 cm عن كل رأس من رؤوس المستطيـــل .

الحل :



المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون أقرب بمقدار 2 cm عن رأس من رؤوس المستطيـــل يمثله النقاط (وبالتالي المساحة) الواقعة داخل ربع دائرة مركزها هذا الرأس ونصف قطرهـــا 2 cm وحيث أنه يوجد للمستطيل أربعة رؤوس ، وبفرض أن الحدث A هـــو أن تكـــون النقطـــة أقرب بمقدار 2 cm عن كل رأس من رؤوس المستطيـــل ، إذن الحدث A يمثلـــه المنطقة المظللة بالرسم والواقعة داخل دائرة نصف قطرها 2 cm وفضاء العينـــة S يمثلـــه المستطيل والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن

$m(S)$ يمثل مساحة المستطيل S

وأيضا

$m(A)$ يمثل مساحة الدائرة A

إذن الاحتمال p أن تكون النقطـــة أقرب بمقـــدار 2 cm عـــن كـــل رأس مـــن رؤوس المستطيـــل يكون

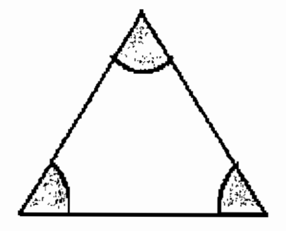
$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\pi (2)^2}{6 \times 8} = \frac{\pi}{12}$$

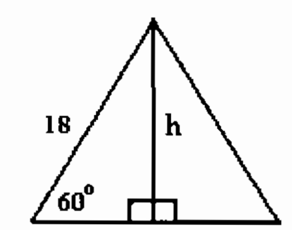
مثـــال ٦٢ :

مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 18 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المثلـث أوجد احتمال أن تكون النقطـــة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلث .

الحل :

الحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون أقرب بمقدار 3 cm عن رأس مـــن رؤوس مثلـــث متساوي الأضلاع يمثله النقاط الواقعة داخل قطاعا دائريا زاوية رأسه 60^0 ومركـــزه هـــذا الرأس ونصف قطر دائرته 3 cm ، وحيث أنه يوجد للمثلـــث ثلاثـــة رؤوس وبفـــرض أن الحدث A هو أن تكون النقطـــة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلـــث ، إذن الحدث A يمثله المنطقة المظللة بالرسم والواقعة داخل القطاعات الدائرية الثلاث والـــتي تشكل نصف دائرة نصف قطرها 3 cm وفضاء العينة S يمثله المثلث والمقياس الهندســـي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن $m(S)$ يمثل مساحة المثلث S وأيضا $m(A)$ يمثل مساحة نصف الدائرة A ، وحيث أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب طول نصـف القاعدة في طول الارتفاع h ، إذن





$$h = 18 \sin 60^0 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$m(S) = \frac{1}{2} \times 18 \times (9\sqrt{3}) = 81\sqrt{3}$$

$$m(A) = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$$

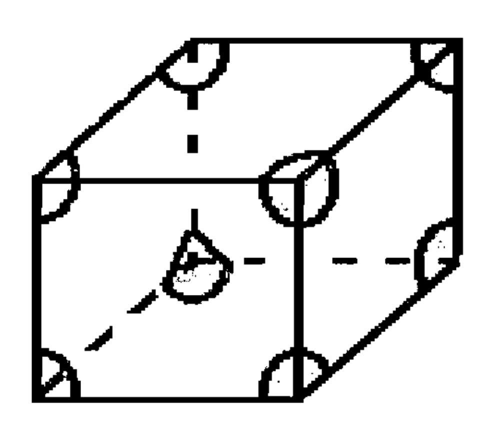
إذن الاحتمال p أن تكون النقطـــة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلث

$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{9\pi}{2 \times 81\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18\sqrt{3}}$$

مثـــال ٦٣ :

مكعب طول ضلعه 20 cm يراد اختيار نقطة بداخله بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن تكون النقطة على بعد 3 cm على الأقل من كل رأس من رؤوس المكعب .

الحل :



النقاط التي تكون أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المكعب هي النقاط الواقعـــة داخل ثمن كرة مركزها هذا الرأس ونصف قطرها 3 cm وحيث أنه يوجد للمكعب ثمانيـــة رؤوس وبفرض أن الحدث A هو أن تكون النقطـــة على بعد 3 cm على الأقل من كـــل رأس من رؤوس المكعب ، إذن الحدث A يمثله مجسم المكعب مطروح منه مجسم الكرة الـــتي نصف قطرها 3 cm وفضاء العينة S يمثله مجسم المكعب بالكامل والمقياس الهندسي المحـدود في هذه الحالة هو الحجم ، أي أن m (S) يمثـــل حجـــم المكعـــب وأيضـــا m (A) يمثل حجم المكعب مطروحا منه حجم الكرة . إذن الاحتمال p أن تكون النقطـــــة علـــى بعد 3 cm على الأقل من كل رأس من رؤوس المكعب يكون

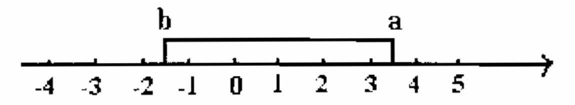
$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{(20)^3 - \frac{4}{3}\pi(3)^3}{(20)^3} = \frac{8000 - 36\pi}{8000}$$

مثـــال ٦٤ :

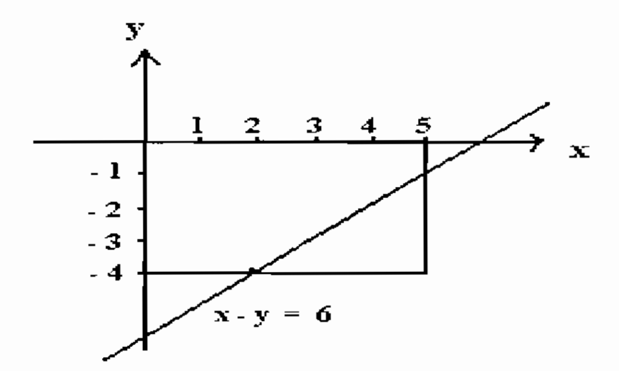
اختيرت نقطتان a , b عشوائيا على خط الأعداد بحيث أن $0 \le b \le -4$, $0 \le a \le 5$

أوجد احتمال أن تكون المسافة بين النقطتين أقل من 6 cm .

الحل : يتم اختيار النقطتان a , b على خط الأعداد كما هو موضح بالرسم



ويتكون فضاء العينة S في هذه الحالة من الأزواج المرتبة (a,b) الواقعة في المنطقة المستطيلة الموضحة بالشكل وبفرض أن الحدث A هو أن تكون المسافة بين النقطتين أقل مـــن 6 cm فإن الحدث A يمثله مجموعة النقاط (a,b) من فضاء العينة S والـــتي تحقـــق الشـــرط $a - b < 6$ أي أن الحدث A هو المنطقة المظللة بالشكل والواقعة فوق الخـــط المســـتقيم $x - y = 6$ والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن $m (S)$ يمثـل مساحة المستطيل S وأيضا $m (A)$ يمثل مساحة المنطقة المظللة الـــتي تمثـل الحـــدث A وبالتالي $m (A)$ يمثل مساحة المستطيل مطروح منها مساحة المثلث القائم الزاويـــة الـــذي طول كل من ضلعي القائمة يساوى 3 كما هو واضح بالرسم من نقـــاط تقـــاطع المســـتقيم بالمستطيل $(2,-4)$, $(5,-1)$. إذن



$$m(S) = 5 \times 4 = 20 \quad , \quad m(A) = 20 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 20 - 4.5 = 15.5 \quad ,$$

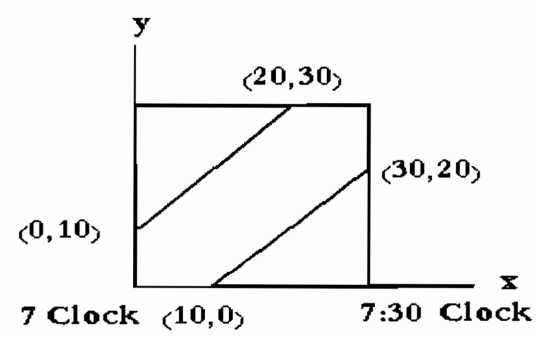
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{15.5}{20} = 0.775$$

مثـــال ٦٥ :

اتفق صديقان على أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف على أن ينتظر الشخص الذي يصل أولا مدة عشرة دقائق فإذا لم يأتِ الشخص الآخر يترك الشـــخص الذي وصل أولا المكان ، فإذا افترضنا أن وقت وصول كل منهما عشوائي فما هو احتمـــال انهما سوف يلتقيان .

الحل :

حيث أن الصديقان اتفقا على أن يلتقيا بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصـــف أي في فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة لذلك نمثل الوقت الذي سيصل فيه الشخص الأول على محـــور x والوقت الذي سيصل فيه الشخص الثاني على محور y كما مبين بالشكل



حيث أن الشخص الذي يصل أولا ينتظر مدة عشرة دقائق ، إذن يلتقي الشخصان إذا كان $|x-y| \le 10$ أي أن الشخصان يلتقيا إذا كانت النقطة (x, y) والتي تمثل وقـــت وصول كل من الشخصان تقع في الجزء المظلل بالرسم . وبفـــرض أن الحـــدث A هـــو أن الشخصان يلتقيا ، إذن الحدث A يمثله المساحة المظللة بالرسم وفضاء العينة S يمثله المربـــع والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن $m(S)$ يمثل مساحة المربع S وأيضا $m(A)$ يمثل مساحة المنطقة المظللة . وحيث أن

$$m(S) = (30)^2 = 900 \quad , \quad m(A) = 900 - 2\times(\frac{1}{2}\times 20\times 20) = 500$$

إذن احتمال التقاء الشخصان $P(A)$ يكون

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$$

٥ - اتصال دالة الاحتمال

Continuity of Probability function

نعلم أن الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة عند النقطة c على خط الأعداد R إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ويقال أنها متصلة على خط الأعداد R إذا كانت متصلة عند جميع النقاط $c \in R$ ، وكذلك نعلم أن اتصال الدالة f على خط الأعداد R له التعريف المكافئ الآتي :

تعريف ٣ :

الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة على خط الأعداد R إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة تقاربية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في R فإن

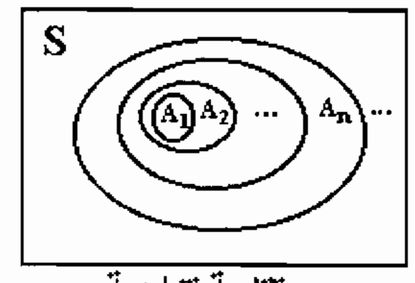
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

ودالة الاحتمال $P : \rho(S) \to [0,1]$ تحقق هذه الخاصية ولتوضيح ذلك نحتاج أولاً إلى بعض التعاريف الهامة .

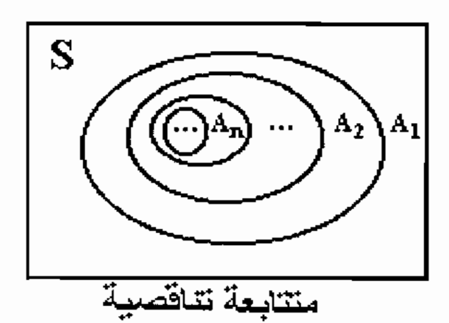
تعريف ٤ :

المتتابعة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الأحداث من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما تسمى متتابعة تزايدية إذا كان $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ أي أن $A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall \quad n \geq 1$ وتسمى متتابعة تناقصية إذا كان $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ أي أن

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad \forall \quad n \geq 1$$



متتابعة تزايدية



متتابعة تناقصية

تعريف ٥ :

للمتتابعة التزايدية من الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإن الرمز $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ يمثل وقوع واحد على الأقل من الأحداث $i \geq 1$, A_i أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ وبالمثل للمتتابعة التناقصية من الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإن الرمز $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ يمثل وقوع كل الأحداث $A_i \ \forall \ i \geq 1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

والنظرية الآتية توضح لنا أن دالة الاحتمال تحقق خاصية الاتصال .

نظرية ١٠ :

لأي متتابعة من الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية أو تناقصية فإن

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

البرهان:

الحالة الأولي : متتابعة الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية

في هذه الحالة نفرض المتتابعة $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة كالآتي

$$B_1 = A_1 \ , B_2 = A_2 - A_1 \ , B_3 = A_3 - A_2 \ , \ \dots \ , \ B_n = A_n - A_{n-1}$$

إذن $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الأحداث المتنافية مثنى مثنى وتحقق

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \quad , \quad n=1,2,3, \dots$$

إذن $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ وباستخدام مسلمة الاحتمال الثالثة

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

وهذا يثبت النظرية في حالة المتتابعة التزايدية .

الحالة الثانية : متتابعة الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ تناقصية

في هذه الحالة

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad , \quad \forall \quad n \geq 1$$

أي أن

$$A'_n \subseteq A'_{n+1} \quad , \quad \forall \quad n \geq 1$$

إذن المتتابعة $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية وبالتالي

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - P((\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)')$$

$$= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} A'_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A'_n)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

وهذا يُثبت النظرية في حالة المتتابعة التناقصية .

مثـــال ٦٦ :

نفرض $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متزايدة من الأحداث بحيث أن $P(A_n) = e^{-\frac{2n^2+7}{6n^2}}$

أوجد $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i)$.

الحل :

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i) = P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)') = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

$$= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n^2+7}{6n^2}} = 1 - e^{-\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+7}{6n^2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{3}}$$

٦ - الاحتمالات 0 و 1 Probabilities 0 and 1

الأحداث ذات الاحتمالات 0 و 1 يجب ألا تسبب لنا أي سوء فهم ، فإذا كان A حدث بحيث أن $P(A) = 0$ فإنه من الخطأ القول أن الحدث A هو حدث مستحيل $A = \Phi$ وكذلك إذا كان B حدث بحيث أن $P(B) = 1$ فإنه من الخطأ القول أن الحدث B هو فضاء العينة $B = S$ ، وفي الحقيقة هناك تجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 0 وكذلك هناك تجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 1 والمثال التوضيحي لذلك هو تجربة اختيار نقطة عشوائيا من داخل الفترة المفتوحة (0 , 1) ومن المعلوم أن كل نقطة في الفترة (0 ,1) لها تمثيل عشري بالصورة $0.d_1 d_2 d_3 \ldots$ حيث $0 \le d_i \le 9$ وبالتالي فإن هذه التجربة العشوائية تكافئ اختيار عدد لا نهائي من الخانات العشرية بطريقة عشوائية ، وقد يكون عدد الخانات منتهى وهذا يحدث في حالة أن جميع الخانات تكون أصفار من بعد خانة عشرية معينة فمثلا لحساب احتمال الحدث E والذي يعنى اختيار العدد $\frac{1}{3}$ من الفترة (0 , 1) وبمعنى آخر لحساب احتمال اختيار العدد ...0.3333333 نفرض متتابعة الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث A_n هو الحدث اختيار n من الخانات العشرية كل منها 3 أي أن A_1 هو الحدث اختيار العدد 0.3 ، والحدث A_2 هو اختيار العدد 0.33 ، A_3 هو الحدث اختيار العدد 0.333 وهكذا A_n هو الحدث اختيار العدد 33 ... 0.3333 والذي يحتوى على n من الخانات العشرية . وحيث أن وقوع الحدث A_n يضمن وقوع الحدث A_{n+1} إذن $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ وحيث انه يوجد عشرة من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى وهى أرقام العد 0,1,2,...,9 ونريد أن نملأ الخانة الأولى بالرقم 3 فقط ، إذن $P(A_1) = \frac{1}{10}$ وحيث انه يوجد 100 من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى والثانية وهى 00,01,02,...,99 ونريد أن نملأ الخانة الأولى والثانية بالرقم 3 فقط ، إذن $P(A_2) = \frac{1}{100}$ وبالمثل يوجد 1000 من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى والثانية والثالثة وهى 999 , ... , 002 , 001 , 000 ونريد أن نملأ الخانة الأولى والثانية والثالثة بالرقم 3 ، إذن $P(A_3) = \frac{\quad}{(10)^3}$ وبوجه عام نحصل على

وحيث أن $P(A_n) = \frac{1}{(10)^n} \quad \forall\, n \geq 1$ $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0.3333333333... = \frac{1}{3}$

إذن احتمال الحدث E الذي يمثل اختيار العدد $\frac{1}{3}$ يكون

$$P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(10)^n} = 0$$

إذن احتمال اختيار العدد $\frac{1}{3}$ من الفترة $(0,1)$ يساوى صفر . ونلاحظ أن ما حدث مع العدد $\frac{1}{3}$ يحدث بالمثل لأي عدد $0.d_1d_2d_3 \;...$ في الفترة $(0,1)$ حيث $0 \leq d_i \leq 9$ وايضاً يحدث بالمثل لأي عدد في أي فترة (a,b) وبالتالي نصل إلى النتيجة الهامة الآتية :

احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة (a,b) يساوى صفر .

وبالتالي يمكننا القول انه لأي حدث احتماله صفر فأنه ليس من الضروري أن يكون هو الحدث المستحيل Φ وبالمثل لأي حدث احتماله 1 فأنه ليس من الضروري أن يكون هو فضاء العينة S للتجربة ، فمثلا في تجربة اختيار نقطة من الفترة $(0,1)$ بأخذ الأحداث

$$B_t = (0,1) - \{t\} \quad \forall\, t \in (0,1)$$

وحيث أن لكل $t \in (0,1)$ فإن $P(\{t\}) = 0$ إذن يوجد عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة $\{t\}$ واحتمال كل منها يساوى 0 وفى نفس الوقت أيا منها لا يمثل Φ وكذلك

$$P(B_t) = P(\{t\}') = 1 - P(\{t\}) = 1 - 0 = 1$$

أي أنه يوجد عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة B_t واحتمال كل منها يساوى 1 وفى نفس الوقت أيا منها لا يمثل فضاء العينة .

مثـال ٦٧ :

اختيرت نقطة عشوائيا من الفترة $(0,100)$ أوجد احتمال أن تكون عدد صحيح .

الحل : حيث أن احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة $(0,100)$ يساوى صفر ، إذن احتمال أن تكون النقطة تمثل عددا صحيحا يساوى صفر ايضا .

٧ - الاختيار العشوائي لنقاط من الفترات

Random Selection of Points from Intervals

في البند السابق وضحنا أن احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة (a, b) يساوى صفر ، وبالتالي إذا كان $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ فإن الأحداث التي تمثل اختيار نقطة عشوائيا واقعة في أيا من الفترات $[\alpha,\beta]\ ,\ (\alpha,\beta)\ ,\ [\alpha,\beta)\ ,\ (\alpha,\beta]$ يكون جميعها متساوية الفرصة في الاحتمال وذلك لأن وجود أو عدم وجود نقاط الأطراف في الفترات لن يؤثر في قيمة الاحتمال ، والآن حيث أن النقطة $\frac{a+b}{2}$ هي منتصف الفترة (a, b) ، إذن في تجربة اختيار نقطة عشوائيا من داخل الفترة (a, b) فإن الاحتمال p_1 للحدث الذي يمثل وقوع النقطة في الفترة $\left(a\ ,\ \frac{a+b}{2}\right)$ يساوى الاحتمال p_2 للحدث الذي يمثل وقوع النقطة في الفترة $\left[\frac{a+b}{2}\ ,\ b\right)$ أي أن $p_1 = p_2$ ، وحيث أن الحدثان متنافيان واتحادهما هو الفترة (a, b) والتي تمثل فضاء العينة للتجربة ، إذن $p_1 + p_2 = 1$ وبالتالي نحصل على $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. أي أنه في تجربة اختيار نقطة عشوائيا من الفترة (a, b) فإن احتمال أن تقع هذه النقطة في الفترة الجزئية $\left(a\ ,\ \frac{a+b}{2}\right)$ يساوى احتمال وقوع النقطة في الفترة الجزئية $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ وكل منهم يساوى $\frac{1}{2}$ ونلاحظ أن طول كل من هذه الفترات الجزئية يساوى نصف طول الفترة (a, b) وبالمثل إذا قسمنا الفترة (a, b) إلى ثلاث فترات جزئية متساوية بواسطة النقاط $\frac{a+2b}{3}\ ,\ \frac{2a+b}{3}$ فإن $p_1 = p_2 = p_3$ حيث p_1 , p_2 , p_3 هي احتمالات أن النقطة التي تم اختيارها تقع في الفترة الجزئية $\left(a\ ,\ \frac{2a+b}{3}\right)$ ، $\left[\frac{2a+b}{3}\ ,\ \frac{a+2b}{3}\right)$ ، $\left[\frac{a+2b}{3}\ ,\ b\right)$ على الترتيب ، وهذه الأحداث متنافية مثنى مثنى واتحادها هو الفترة $(a\ ,\ b)$ ، إذن $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ وبالتالي نحصل على $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ ونلاحظ أن طول كل من الفترات الجزئية يساوى ثلث طول الفترة (a, b) وبوجه عام يمكننا صياغة النتيجة الآتية :

في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a , b) فإن الفترات الجزئية والمتساوية الطول من الفترة (a , b) يكون فرصة وقوع النقطة في أيا منـــها متساوي وإذا كانت (α,β) فترة جزئية من (a , b) فإن احتمال وقوع النقطة في الفترة الجزئية (α,β) يساوى $\frac{\beta - \alpha}{b - a}$.

وهذه النتيجة سبق وان تعاملنا معها بدون أن نوضحها عندما تعاملنا مع مقيـــاس الطـــول ف فضاء الاحتمال اللانهائي الغير قابل للعد في البند ٤ من هذا الفصل ، وكما وضحنا الآن فـــإن اختيار نقطة بطريقة عشوائية من فترة يكافئ اختيار عدد لا نهائي من الخانات العشرية وهذا أن كان يجوز من الوجهة النظرية لكنه مستحيل من الوجهة العملية ، ولكننا سوف نتفق على انــه عند الحديث عن تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a,b) فإننا سوف نتخيل كمـا لو أن هناك صندوق كبير يحتوى على عدد لانهائي من الكرات المتميزة وكل من هذه الكرات يحمل رقم مأخوذ من الفترة (a,b) ثم قمنا بخلط الكرات معا وبالتالي كل من هذه الكـــرات والتي هي في حقيقة أمرها أعداد من الفترة (a,b) يكون لها نفس الفرصة في السحب وعلـــى ذلك فإن تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a,b) أصبحت تكافئ تجربة ســـحب كرة من هذا الصندوق ثم النظر إلى العدد الذي تحمله هذه الكرة المسحوبة.

مثـــال ٦٨ :

تصل حافلة (أتوبيس) إلى أحد المحطات كل يوم في وقت عشوائي بـــين الســـاعة الواحـــدة والساعة الواحدة والنصف ظهرا ، إذا وصل شخص إلى المحطة الساعة الواحدة ظهرا تمامـــا فأوجد احتمال أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 10 دقائق .

الحل :فضاء العينة هو الفترة الزمنية من الساعة 1:00 إلى الساعة 1:30 ومدها 30 دقيقـــة والحدث أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 10 دقائق يعـــنى أن الحافلـــة يمكن أن تصل إلى المحطة بعد مرور عشرة دقائق أي في الفترة الزمنية من الســـاعة 1:10 إلى الساعة 1:30 ومدها 20 دقيقة . إذن الاحتمال المطلوب p يكون $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

الفصل 3

تمارين

١ –ألقي حجر نرد 200 مرة ، والجدول الآتي يوضح تكرار ظهور كل من الأعداد الستة في فضاء العينة

العدد	1	2	3	4	5	6
التكرار	25	37	39	37	32	30

أوجد التكرار النسبي للحدث

١ – ظهور العدد 3 .

٢ – ظهور العدد 6 .

٣ – ظهور عدد زوجي .

٤ – ظهور عدد أولى .

٥ – ظهور عدد أقل من 4 .

٦ – ظهور عدد أكبر من 3 .

٢ – إذا كان احتمال ان يتخرج أحد الطلاب من الكلية بتقدير امتياز أو بتقدير جيد جدا يساوى 0.82 وإذا كان احتمال ان يتخرج هذا الطالب بتقدير جيد جدا يساوى 0.6 فأوجد احتمال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير امتياز .

٣ – إذا كان احتمال ان يلتحق أحد الطلاب المتفوقين بكلية الطب أو كلية الصيدلة بجامعة عين شمس يساوى 0.95 وإذا كان احتمال ان يلتحق هذا الطالب بكلية الصيدلة 0.52 فأوجد احتمال أن يلتحق هذا الطالب بكلية الطب .

٤ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $P(B)=k$, $P(A)=\frac{3}{8}$
أوجد قيمة الثابت k في حالة أن A , B حدثان متنافيان .

٥ – إذا كان A , B حدثان متنافيان وكان $P(A)=0.55$, $P(B)=0.35$ أوجد

1- $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$

2- $P(A')$, $P(B')$

3- $P(A'\cap B')$, $P(A'\cup B')$

4- $P(A\cap B')$, $P(A\cup B')$

٦ – أحد شركات التامين على الحياة تصدر ثلاث وثائق مختلفة للتامين A , B , C ويحـــق لأي شخص أن يختار نوع واحد فقط من الثلاث وثائق للتامين على حياته . تم اختيـــار شخص بطريقة عشوائية من عملاء الشركة الذين تم التامين على حياقم فإذا كان احتمال أن هذا الشخص يتبع الوثيقة A هو 0.45 واحتمال أن يتبع الوثيقـة B هـــو 0.4 أوجد احتمال أن هذا الشخص يتبع الوثيقة C .

٧ – أوجد احتمال ظهور الصورة في تجربة إلقاء عملة معدنية غــير متزنــة إذا علمـت أن أرجحية ظهور الصورة هي النسبة 5 : 3 .

٨ – أوجد احتمال فوز أحد المتسابقين في سباق للسيارات إذا كانت أرجحيته هي 5 إلى 12.

٩– احتمال أن ينجح طالب في مقرر الرياضيات هـــو 0.92 واحتمال أن ينجح في مقـــرر الفيزياء هـــو 0.87 واحتمال أن ينجح في المقررين معا هو 0.83 فما هو احتمـــال أن ينجح الطالب في مقرر منهم على الأقل ؟

١٠ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.35 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.2$$

أوجد كل مما يأتي :

1- $P(A \cup B)$ 3- $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$

2- $P(A')$, $P(B')$ 4- $P(A \cap B')$, $P(A \cup B')$

١١– إذا كان A , B حدثان بحيث أن $A \subset B$ وكان $P(A) = 0.55$, $P(B) = 0.85$

فأوجد ما يأتي :

1- $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ 3- $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$

2- $P(A')$, $P(B')$ 4- $P(A \cap B')$, $P(A \cup B')$

١٢– إذا كان 12% من سكان أحد المدن لهم فصيلة الدم O^+ وكان 5% لهم فصيلـة الدم O^- اخترنا أحد سكان هذه المدينة بطريقة عشوائية . أوجد احتمـــال أن تكـــون فصيلة دمه O .

١٣– في أحد المدن يوجد ثلاثة أندية اجتماعية A , B , C . تم اختيار شخص بطريقة عشوائية ، فإذا كان احتمال أن هذا الشخص مشترك في النادي A هو 0.35 واحتمال أن يكون مشترك في النادي B هو 0.55 واحتمال أن يكون مشترك في النادي C هو 0.3 واحتمال أن يكون مشترك فى كل من A , B هو 0.25 واحتمال أن يكون مشترك في كل من A , C هو 0.2 واحتمال أن يكون مشترك فى كل من B , C هو 0.15 واحتمال أن أن يكون مشترك في ألاندية الثلاثة هو 0.1

أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١– الحدث أن هذا الشخص مشترك في نادي واحد على الأقل .

٢– الحدث أن هذا الشخص غير مشترك في أيا من ألاندية الثلاثة.

١٤– نفرض أن فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما هو فضاء منتهى $S = \{ a,b,c,d \}$ وضح أيا من الدوال الآتية تعرف فضاء احتمال على فضاء العينة S .

1 - $P(a) = \frac{2}{5}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = \frac{1}{5}$

2 - $P(a) = \frac{1}{4}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{-1}{3}$, $P(d) = \frac{3}{4}$

3 - $P(a) = \frac{1}{4}$, $P(b) = 0$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = \frac{1}{2}$

4 - $P(a) = \frac{1}{12}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{1}{6}$, $P(d) = \frac{5}{12}$

5 - $P(a) = \frac{1}{12}$, $P(b) = \frac{1}{4}$, $P(c) = \frac{1}{6}$, $P(d) = \frac{5}{12}$

١٥– نفرض أن (S , P) فضاء احتمال حيث $S = \{ a,b,c,d \}$

١ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(b)=0.3$, $P(c) = 0.25$, $P(d) = 0.125$.

٢ – أوجد $P(a) , P(b)$ إذا كان $P(a)=2P(b)$, $P(c) = P(d) =0.25$.

٣ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(b)=0.3$, $P(b,d) = 0.5$, $P(b,c) = 0.65$.

٤ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(b,c,d) = 0.85$.

٥ – أوجد احتمال كل من عناصر S إذا كان $P(a)=2P(b) =3P(c) = 4P(d)$.

١٦–في أحد المستشفيات وجد أن عدد المرضى فى أحد الأيام والذين يترددون علـــى عيـــادة الأسنان أربعة أمثال الذين يترددون على عيادة الباطنة وضعف الذين يترددون على عيادة العيون وعدد المرضى الذين يترددون على عيادة العيون سبعة أمثال الذين يترددون علـــى عيادة مرضى السكر . تم اختيار أحد المرضى فى هذا اليوم بطريقة عشوائية ، وبفـــوض أن أيا من المرضى فى هذا اليوم يذهب إلى عيادة واحدة فقط من هذه العيـــادات الأربعـــة ، أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص فى هذا اليوم

١ – لم يذهب إلى عيادة الباطنة .

٢– ذهب إلى عيادة الأسنان أو عيادة العيون .

١٧– يتسابق ثلاثة أشخاص A , B , C في سباق للسيارات ، فإذا كان احتمال فوز A هو ثلاثة أمثال احتمال فوز B واحتمال فوز B هو نصف احتمال فوز C فأوجد

١ – احتمال فوز كل شخص من الأشخاص الثلاثة .

٢ – احتمال فوز A أو C .

٣ – احتمال عدم فوز C .

١٨– في أحد المدن الصغيرة وجد أن عدد الأشخاص من فصيلة الـــدم A يســـاوى عـــدد الأشخاص من فصيلة الدم B وعدد الأشخاص من فصيلة الدم AB أربعة أمثال عـــدد الأشخاص من فصيلة الدم O وعدد الأشخاص من فصيلة الدم B سبعة أمثال عـــدد الأشخاص من فصيلة الدم O . أوجد احتمال أن المولود القادم في هذه المدينة يكـــون له فصيلة الدم AB .

١٩– تقدم أربعة أشخاص إلى مسابقة لشغل وظيفة واحدة في أحد الشركات وكان الشـــخص الأول والثالث لهم نفس الفرصة لشغل الوظيفة بينما كانت فرصة الشخص الثاني للفـــوز بالوظيفة تزيد عن فرصة الرابع بنسبة 30% وتقل عن فرصـــة الثـــالث بمقـــدار 5% أوجد احتمال الفوز بالوظيفة لكل من الأشخاص الأربعة علما بأنه سيتم اختيار شـــخص منهم للوظيفة . أوجد كذلك احتمال عدم فوز الشخص الرابع بالوظيفة .

٢٠– عينة عشوائية تتكون من n عنصر تم اختيارها بدون إرجاع من مجتمع بـــه N مـــن العناصر . أوجد احتمال أن عنصر معين من المجتمع يكون موجود في العينة .

٢١– مجموعة من 33 طالب بالكلية حصل 17 طالب منهم على تقديـــر جيـــد في الفصـــل الدراسي الأول وحصل 14 منهم على تقدير جيد في الفصل الدراسي الثاني وعـــدد 11 طالب منهم لم يحصل على تقدير جيد سواء في الفصل الأول أو الفصل الثاني . اخترنـــا طالب بطريقة عشوائية من هذه المجموعة ، أوجد احتمال أن هذا الطالب حصـــل علـــى تقدير جيد في كل من الفصلين الدراسيين .

٢٢–أجري امتحانان للرياضيات على 400 طالب فنجح في الامتحـــان الأول 330 طالبـــا ونجح في الامتحان الثاني 310 طالبا ونجح في الامتحانين معا 290 طالبا .

١–أوجد احتمال ونسبة النجاح في الامتحان الأول وفي الامتحان الثاني وكذلـــك في الامتحانين معا .

٢– أوجد احتمال ونسبة النجاح في امتحان واحد على الأقل .

٢٣– سحبت ورقة بطريقة عشوائية تتكون من بين 60 ورقة مرقمة من 1 إلى 60 . أوجـــد احتمال أن يكون العدد المسحوب لا يقبل القسمة على 5 .

٢٤– سحبت كرة عشوائيا من كيس يحتوى على n من الكرات مرقمة من 1 إلى n حيث $n>6$ ، أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة تحمل رقم أقل من 6 .

٢٥–في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فقط فإذا كان الحدث A هو ظـــهور عـــدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 والحدث C هو ظهور عدد يقبل القســـمة على 3 أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٢٦- في تجربة إلقاء حجر نرد غير متزن إذا كان احتمال ظهور أي رقم يتناسب مع هذا الرقم وإذا كان الحدث A هو ظهور عدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد زوجي والحدث C هو ظهور عدد أولى (أي لا يقبل القسمة ألا على نفسه وعلى 1)

١ - أوجد $P(A), P(B), P(C)$.

٢ - أوجد احتمال ظهور عدد زوجي أو ظهور عدد أولى .

٣ - أوجد احتمال ظهور عدد فردى أو ظهور عدد أولى .

٤ - أوجد احتمال ظهور عدد زوجي وليس أولى .

٢٧- في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي أوجد

١ - احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين يساوي 8 .

٢ - احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 7 .

٣ - احتمال أن يكون الفرق المطلق بين العددين في الرميتين يساوى 4 .

٤ - احتمال أن يكون الفرق المطلق بين العددين في الرميتين اكبر من 5 .

٢٨-في تجربة إلقاء حجر نرد متزن 6 مرات على التوالي أوجد ما يأتي

١- احتمال الحصول على العدد 5 مرتين على الأقل .

٢ - احتمال عدم ظهور وجهين متتاليين ومن نفس النوع .

٣ - احتمال الحصول على ستة أعداد مختلفة .

٢٩- في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين إذا كان الحدث A هو ظهور الرقمين 4 , 6 على وجهي حجري النرد والحدث B هو ظهور الرقمين 5 , 3 على وجهي حجري النرد فأوجد $P(A' \cap B')$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

٣٠-القي حجري نرد متزنين ومتميزين أوجد احتمال كل مما يأتي

١ - ظهور رقمين زوجيين .

٢ - ظهور رقمين متساويين .

٣ - ظهور رقم زوجي وآخر فردى .

٤ - ظهور الرقم 5 مع عدد زوجي .

ثم أوجد احتمال كل من هذه الأحداث إذا كان حجري النرد متزنين ومتماثلين .

٣١– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين اعتقد أحد الأشخاص أن احتمال أن يكـون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوى 7 هو نفسه احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوى 8 . هل تتفق مع هذا الشخص في اعتقاده ؟ وضح أجابتك .وإذا علمت أن حجري النرد متزنين ومتماثلين هل ما زلت على رأيك السابق ؟ ولماذا ؟

٣٢– في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة 4 مرات على التوالي لملاحظة ظهور الصورة ، إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة 3 مرات على الأقل ، الحدث B هو ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر والحدث C هو ظهور الصورة مرتين بالضبط أوجد

$$P(A \cap B) \quad , \quad P(B \cap C) \quad , \quad P(A') \; ,$$
$$P(B') \quad , \quad P(A - B) \quad , \quad P(B - C)$$

٣٣– في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية غير متزنة 4 مرات متتالية ، فإذا علمت أن احتمـــال ظهور الصورة 0.6 فأوجد احتمال ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٣٤– نفرض أن A , B حدثان من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما . أثبت أن

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

٣٥–في تجربـــة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات على التوالي أوجد احتمـــال كـــل مـــن الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٢ – الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .

٣ – الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

٤ – الحدث A_4 ظهور الصورة في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور الصورة على الإطلاق .

٣٦–اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 84\}$ أوجـــد احتمال أن هذا العدد مع العدد 84 يكونا عدديين أوليين بالنسبة إلى بعضهما .

٣٧-في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث A_1 ظهور العدد 6 في الرمية الثانية .

٢ - الحدث A_2 مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 .

٣ - الحدث A_3 مجموع العددين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

٤ - الحدث A_4 ظهور عدد في الرمية الأولى اكبر من الذي يظهر في الرمية الثانية .

٥ - الحدث A_5 عدم ظهور العدد 6 في الرميتين .

٦ - الحدث أن مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 ويقبل القسمة على 3.

٣٨-للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال و مع مراعاة الترتيب في الولادة أوجد احتمال كل من

١-وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .　　٣- عدم وجود ولد في العائلة .

٢-وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .　　٤- المولود الثاني ولد .

٣٩- للعائلات التي لديها طفلان ومع مراعاة ترتيب الولادة أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث A_1 يعنى عدم وجود بنت للعائلة .

٢ - الحدث A_2 يعنى وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٣ - الحدث A_3 يعنى وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٤ - الحدث A_4 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة .

٥ - الحدث A_5 يعنى أن المولود الثاني ولد .

٦ - الحدث A_6 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة والمولود الثاني ولد .

٤٠- في مجتمع ما كان احتمال أن يكون المولود ذكرا ضعف احتمال أن يكون المولود أنثى وبفرض انه تم تسجيل ثلاث حالات ولادة أوجد الاحتمالات الآتية :

١ - أن تكون الحالات الثلاث جميعها من الذكور .

٢- أن يكون اثنان من الذكور والثالث أنثى .

٣ - أن يكون مولود واحد على الأقل من الذكور .

٤١– عرف فضاء العينة لتجربة سحب ثلاث قطع نقود معا من كيس يحتوى على عدد 4 قطع نقود من فئة 50 قرش ، عدد 3 قطع نقود من فئة 25 قرش ، 2 قطعة من فئة 20 قرش ، 5 قطع من فئة 10 قروش وقطعة واحدة من فئة 5 قروش ، ثم أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 70 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 70 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 60 قرش وأقل من 150 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 50 قرش على الأكثر .

٤٢–نفرض مجموعة الأعداد الصحيحة { 100000 , ... , 3 , 2 , 1 } فإذا تم اختيار عدد بطريقة عشوائية من هذه المجموعة فأوجد احتمال أن يكون هذا العدد

١ – من خمسة خانات .
٢ – يقبل القسمة على 3 .
٣ – لا يقبل القسمة على 5 .
٤– يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .
٥– لا يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .
٦– يقبل القسمة على 4 ولا يقبل القسمة على 6 .

٤٣–قاعة للاجتماعات لها أربعة أبواب مختلفة . دخل أحد الأشخاص من أحد أبواب القاعة لحضور اجتماع ما . أوجد احتمال خروجه من باب أخر غير الذي دخل منه .

٤٤– خمسة طرق مزدوجة تؤدى إلى تقاطع (دوران) في أحد المدن ، دخل سائق بسيارته من أحد الطرق إلى الدوران ، أوجد احتمال أن السائق دخل الدوران لكي يعكس اتجاهه في الطريق الذي دخل منه .

٤٥– تحرك مصعد في أحد العمارات من الطابق الأرضي وبه 6 أشخاص وكان المصعد يتوقف في كل من الطوابق العشرة المتبقية وبفرض أن خروج أيا من الأشخاص إلى أيا من الطوابق العشرة متساوي الفرصة فأوجد ما يأتي :

١ – احتمال عدم نزول اثنين من الأشخاص في نفس الطابق .

٢ – احتمال نزول اثنين من الأشخاص على الأقل في نفس الطابق .

٣ – احتمال نزول الأشخاص الستة في طوابق مختلفة .

٤٦- في مصعد أحد العمارات ركب ثلاثة أشخاص ، فإذا كان المصعد يتوقف في الطابق الثاني والثالث والرابع وبفرض أن خروج أيا من الأشخاص إلى أيا من الطوابق الثلاث متساوي الفرصة فأوجد ما يأتي :

١ - احتمال أن الأشخاص الثلاثة يتركون المصعد فى طوابق مختلفة .

٢ - احتمال أن الأشخاص الثلاثة يتركون المصعد فى نفس الطابق .

٣- احتمال أن أحد الأشخاص على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع .

٤- احتمال أن المصعد يكون بدون ركاب عند وصوله الطابق الثالث .

٥- احتمال أن المصعد يكون بدون ركاب عند وصوله الطابق الرابع .

٤٧- سيارة أجرة تتبع أحد شركات السياحة تحمل الركاب من مطار القاهرة الدولي إلى ثلاثة فنادق مختلفة ، فإذا علمت أن السيارة غادرت المطار وبها عدد 4 من السياح . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث أن السياح يترلون في نفس الفندق .

٢ - الحدث أن السياح يترلون في فندقين مختلفين .

٣ - الحدث أن السياح يترلون في الفنادق الثلاثة .

٤٨-كون الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة من الأولاد والبنات في عائلة لديها أربعة أطفال وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١- وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .

٢- وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٣- وجود ولدان في العائلة .

٤- المولود الرابع ولد .

٤٩- في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد أربعة أشواط ؟

٥٠- في مباراة للشطرنج Chess بين لاعبين يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد خمسة أشواط ؟

٥١– يلعب فريقان مباراة ما ويعتبر الفريق فائزا إذا فاز في شوطين على التوالي أو أربعة أشواط في كل المباراة ، ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد ستة أشواط ؟

٥٢– كيس يحتوى على أربعة قطع نقود اثنتان عاديتان واثنتان ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من الثلاث قطع المتبقية بالكيس ثم تلقى . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

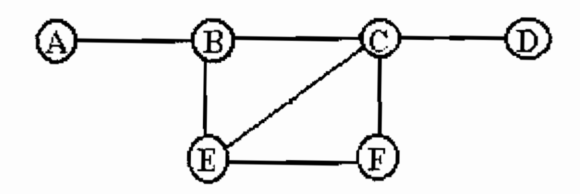
١ – ظهور صورة مرة واحدة على الأكثر . ٢ – ظهور الصورة مرتين .

٥٣– كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى فإذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة . ارسم شجرة بيانية للتجربة وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – ظهور عدد زوجي . ٣ – ظهور صورة وعدد زوجي .

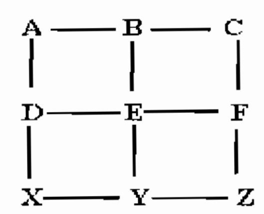
٢ – ظهور عدد يقبل القسمة على 3. ٤ – ظهور كتابة وعدد فردى .

٥٤–النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل على

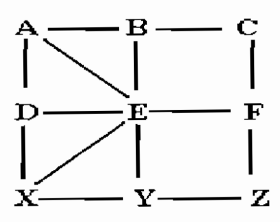


جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجد احتمال انه سيتوقف للاستراحة في المدينة B .وإذا علمت بوجود طريق بين المدينتين B , F فهل ستتغير قيمة الاحتمال السابق ؟ وضح أجابتك ؟

٥٥- في الرسم الآتي تسع نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بـــدأ رجـــل في التحرك من النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأســية أو خطوة أفقية



ويتوقف عن الحركة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قــد مر بها من قبل . أوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط التسع إذا كـــانت الخطــوة الأولى من X إلى D . وإذا كان يوجد طريق بين X , E وطريق بين A , E كمــا موضح بالرسم التالي فأوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط التسعة في هذه الحالــة إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى E .



٥٦- في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز	غرفتين	الطابق الأول
جناح جيد	ثلاث غرف	الطابق الثاني
جناح متوسط		الطابق الثالث

ارسم شجرة بيانية توضح الاختيارات الممكنة وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث .　　٣ - حجز جناح متوسط .

٢- حجز جناح من ثلاث غرف بالطابق الأول .　　٤ - حجز جناح من غرفتين .

٥٧- في مجموعة تتكون من 100 طالب وجد أن 20 طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات والعلوم ، 29 طالب يدرسون الرياضيات والعلوم ، 35 طالب يدرسون الرياضيات واللغة العربية ، 26 طالب يدرسون العلوم واللغة العربية ، 8 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 12 طالب يدرسون العلوم فقط ، 22 طالب يدرسون اللغة العربية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

٢ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

٣ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والعلوم ولا يدرس اللغة العربية .

٤ – الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

٥ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

٦ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

٧ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

٨ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأكثر .

٥٨- في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يلعبونها ، فإذا كان 62 طالب يلعبون كرة القدم ، 53 يلعبون كرة السلة ، 65 يلعبون العاب القوى ، 19 يلعبون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يلعبون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يلعبون أيا من الألعاب الثلاث . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يلعب كرة القدم فقط .

٢ – الحدث أن الطالب يلعب لعبة واحدة فقط .

٣ – الحدث أن الطالب لا يلعب كرة السلة .

٤ – الحدث أن الطالب يلعب لعبتين فقط ليس من ضمنهم العاب القوى.

٥ – الحدث أن الطالب يلعب لعبتين فقط .

٥٩- في مجموعة من 250 طالب بالكلية وجد أن 230 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية، الفرنسية ،الألمانية ووجد أن 135 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 86 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 54 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 30 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 35 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية ،15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال أن الطالب يدرس الثلاث لغات .

٦٠- في تجربة اختيار عدد عشوائيا من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3, \ldots , 500\}$ فإذا كان الحدث A هو اختيار عدد زوجي والحدث B هو اختيار عدد فردى والحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث D هو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 والحدث E هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية

1- A, B, C, D, E

2- $A \cup B \ , \ C \cup E$

3- $A \cap B \ , \ C \cap D$

4- $A \cap B' , \ C' \cap E'$

٦١- خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد في صف واحد . أوجد
١ - احتمال أن تجلس النساء متجاورات .
٢ - احتمال أن لا يجلس اثنان من نفس الجنس بجانب بعضهما .

٦٢- بطريقة عشوائية جلس 4 أولاد وبنتان حول منضدة مستطيلة الشكل حيث يوجد 4 كراسي على جانب وأربعة كراسي على الجانب الآخر . أوجد احتمال أن البنتان لن يجلسا على نفس الجانب من المنضدة .

٦٣- ثلاثة أولاد وثلاثة بنات يتجهون إلى صف به ستة مقاعد للجلوس عشوائيا بأي ترتيب
١ - أوجد احتمال أن يجلس الأولاد معا والبنات معا .
٢ - أوجد احتمال أن تجلس البنات معا .

٦٤– يجلس n رجل و m سيدة في صف بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن يجلس الرجال معا والنساء معا .

٦٥– خمسة طلاب بالفرقة الثالثة وخمسة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على عشرة مقاعد في صف واحد بقاعة الامتحان أوجد احتمال أن لا يجلس طالبان متجاوران من نفس الفرقة .

٦٦– عند ترتيب حروف كلمة **PROBABILITY** في صف . أوجد احتمال

١ – الحصول على كلمة تبدأ بالمقطع **PROB** .

٢ – الحصول على كلمة تنتهي بالمقطع **TY** .

٣ – الحصول على كلمة تحتوى المقطع **BB** .

٦٧– أحد الأشخاص لديه 12 قميص و 3 بدله و 9 رابطة عنق و 4 أحذية . فإذا علمت أن 4 قمصان و 1 بدلة و 3 رابطة عنق و 2 حذاء جميعها لونها أسود . تم دعوت هذا الشخص للحضور إلى اجتماع بالزي الكامل . أوجد احتمال أن يرتدي هذا الشخص زي لونه اسود بالكامل .

٦٨– إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية الإنجليزية يتبعهما عدد من ستة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفر .تم اختيار لوحة معدنية بطريقة عشوائية ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – تبدأ اللوحة بالحرف **R** .   ٣ – تحمل اللوحة الحرفين **RY**

٢ – تحمل اللوحة عدد زوجي .   ٤ – تحمل اللوحة عدد يقبل القسمة على **111111**.

٦٩– أرقام التليفونات في سنترال مصر الجديدة كل منها يتكون من سبعة أرقام على أن يبدأ بالرقمين 63 ذهب أحد الأشخاص للتعاقد على تركيب خط تليفون للمنزل ، أوجد احتمال كل مما يأتي :

١ – أن يشتمل رقم تليفونه على السنة التي ولد فيها علما بأنه من مواليد 1955 .

٢ – أن يشتمل رقم تليفونه على الرقم 5 مرة واحدة على الأقل .

٧٠- اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعـداد $\{1, 2, 3, \ldots, 1000000\}$ أوجد احتمال أن العدد يحتوى على الرقم 4 مرة واحدة على الأقل ضمن خاناته .

٧١- إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $a x^2 + b x + c = 0$ يتم تحديدها عـن طريق إلقاء حجر نرد متزن ثلاث مرات على التوالي والعدد الذي يظهر في الرميـة الأولى يمثل المعامل a والعدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل المعامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثالثة يمثل العدد c .

١ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

٧٢- يوجد 10 من النقاط A , B , C , D , E , F, G , H , I , J في المسـتوى بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد . اخترنا ثلاثة نقاط منـها بطريقـة عشوائية ورسمنا ثلاثة مستقيمات تصل بين هذه النقاط الثلاث التي تم اختيارها . أوجـد احتمال أن هذه المستقيمات لا تمر بالنقاط B , D , G , H .

٧٣- يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد ، اخترنا ثلاث نقاط منها بطريقة عشوائية ورسمنا مثلث رؤوسه هـذه النقاط الثلاث. أوجد احتمال أن (x_1 , y_1) أو (x_n , y_n) ضمن رؤوس هذا المثلث .

٧٤- شخص له تسعة أصدقاء ، ويرغب في دعوة أربعة منهم إلى العشاء ، وإذا علمـت أن اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معا في حالة دعوة أيا منـهما إلى العشـاء فأوجد احتمال ألا يكونا ضمن المدعوين . وإذا علمت أن اثنان من أصدقائه متخـاصمين فأوجد احتمال أن يجتمعا معا على العشاء ضمن المدعوين .

٧٥- من بين 9 رجال وزوجاقم تم اختيار شخصين بطريقة عشوائية . أوجد احتمال كل من

١ – اختيار رجل وزوجته .

٢- اختيار رجل وسيدة ليست زوجته .

٣ – اختيار رجل وسيدة .

٤ – اختيار رجلين أو سيدتين .

٧٦- في أحد المدارس من بين 5 طلاب بالفرقة الأولى ، 10 طلاب بالفرقـة الثانيـة ، 15 طالب بالفرقة الثالثة يراد اختيار لجنة ثقافية بالمدرسة تتكون من 9 طـلاب ، أوجـد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – اللجنة تشمل أعداد متساوية من الطلاب في الفرق الدراسية الثلاث .

٢ – اللجنة تشمل على 2 طالب بالفرقة الأولى , 3 بالفرقة الثانية , 4 بالفرقة الثالثة .

٣ – اللجنة تشمل 5 طلاب بالفرقة الثانية .

٤ – اللجنة لا تشمل أيا من طلاب الفرقة الأولى .

٥ – اللجنة تشمل طلاب بالفرقة الثالثة فقط .

٦ – اللجنة تشمل على الأكثر 3 طلاب من الفرقة الثانية .

٧ – اللجنة تشمل على الأقل 6 طلاب من الفرقة الثالثة .

٨ – جميع أعضاء اللجنة من نفس الفرقة الدراسية .

٧٧- يراد اختيار لجنة طلابية مؤلفة من 10 طلاب من بين 30 طالب من الفرقة الرابعة و 40 طالب من الفرقة الثالثة في الكلية . أوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تحتوي اللجنة على 5 طلاب من كل فرقة دراسية .

٢ – احتمال أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة .

٣ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الرابعـة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة .

٧٨- من بين 10 رجال و 8 نساء يراد تكوين لجنة بطريقة عشوائية مؤلفة من 6 أشخاص

١ – أوجد احتمال أن اللجنة تقتسم بالتساوي بين الرجال والسيدات .

٢ – أوجد احتمال أن نسبة الرجال باللجنة اكبر من نسبة السيدات .

٣ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على أربعة رجال وسيدتين .

٧٩- نفرض مجموعة الأرقام الزوجية { 8 , 6 , 4 , 2 } فإذا تم اختيار 3 أرقام مـن هـذه المجموعة بطريقة عشوائية لتكوين عدد من ثلاث خانات وبفـرض السـماح بـالتكرار احسب احتمال أن قيمة هذا العدد تكون اكبر من 500 .

٨٠- من عدد 6 أساتذة ، 8 أساتذة مساعدين ، 10مدرسين ، 12 مدرس مساعد ، 8 معيدين بقسم الرياضيات بالكلية يراد تكوين لجنة عشوائيا من 10 أشخاص . أوجد احتمال كل مما يأتي :

١- أن يكون باللجنة 2 من الأساتذة .

٢- أن تكون اللجنة من الحاصلين على الدكتوراه (بدون مدرسين مساعدين أو معيدين).

٣- أن تكون اللجنة من غير الحاصلين على الدكتوراه .

٤- أن تكون جميع الدرجات العلمية ممثلة باللجنة وبالتساوي .

٥- أن يكون أعضاء اللجنة من الأساتذة والأساتذة المساعدين بالتساوي .

٨١- اختبار من خمسة أسئلة وكل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F فإذا قام احد الطلاب بالإجابة على الأسئلة الخمسة بالتخمين فأوجد

١ - احتمال أن تكون الإجابة صواب على ثلاثة أسئلة على الأقل .

٢ - احتمال أن تكون الإجابة خطأ على سؤالين على الأكثر .

٣ - احتمال أن تكون الإجابة خطأ على جميع أسئلة الاختبار .

٤ - احتمال أن تكون الإجابة بالصواب اكبر من الإجابة بالخطأ .

٥ - احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع أسئلة الاختبار .

٨٢- اختبار بنظام الاختيار من متعدد Multiple – Choice بحيث أن لكل سؤال ثلاثة اختيارات منها إجابة واحدة فقط صواب فإذا كان الاختبار يتكون من خمسة أسئلة وقام احد الطلاب بالإجابة على جميع الأسئلة بالتخمين ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الإجابة تكون صواب على سؤالين .

٢ - الإجابة تكون صواب على سؤالين على الأكثر .

٣ - الإجابة تكون خطأ على سؤالين على الأكثر .

٤ - الإجابة الصواب تكون اكثر من الإجابة الخطأ .

٥ - الإجابة تكون صواب على الأسئلة جميعها .

٦ - الإجابة تكون خطأ على الأسئلة جميعها .

٨٣- امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – Choice يحتوى علـــى 20 ســؤال ولكل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقط صحيحة . قام أحد الطلاب بالإجابة علــــى كل أسئلة الامتحان بالتخمين . أوجد

١ – احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب على نصف الأسئلة .

٢ – احتمال أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان .

٣ – احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان .

٨٤- نفرض مجموعة الأرقام { 0,1,4,5,6,8,9 } ، تم اختيار أربعة أرقام بطريقة عشــــوائية لتكوين عدد من أربعة خانات وبفرض عدم السماح بالتكرار أحسب ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون قيمة العدد اقل من 7000 .

٢ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 5 .

ثم احسب الاحتمالات السابقة إذا سمح بالتكرار عند اختيار الأرقام من المجموعة المعطاة .

٨٥- عند رصد بيانات Data في أحد برامج الكومبيوتر أخطأ طـــالب بإدخـــال عدديـــن بإشارة سالبة ضمن 6 أعداد موجبة وكذلك أخطأ في إدخال عددين بإشـــارة موجبـــة ضمن 4 أعداد سالبة ، وفي مرحلة ما من البرنامج تم اختيار ثلاثة أعداد مختلفة منـــــها عشوائيا . أوجد احتمال انه في هذه المرحلة لم يتم أي خطأ في الحسابات ، وإذا كـــــانت العملية الحسابية هي جمع مربعات الأعداد الثلاثة التي تم اختيارها عشوائيا فما هو احتمال انه في هذه المرحلة يحدث خطاء في الحسابات .

٨٦- قطيع من الأغنام به 25 سليمة و 5 أغنام مصابة ، أخذت عينة من ثلاثة أغنام بطريقـــة عشوائية . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – العينة كلها أغنام سليمة .

٢ – العينة كلها أغنام مصابة .

٣ – عدد الأغنام السليمة في العينة اكبر من عدد الأغنام المصابة .

٤ – العينة تحتوى على أغنام سليمة ومصابة .

٨٧- في تجربة سحب 6 كرات من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء . أوجد احتمال سحب 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء فى حالة إذا تم السحب بإرجـاع ثم في حالة إذا تم السحب بدون بإرجاع .

٨٨- صندوق يحتوى على6 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء . تم سحب مجموعة من ثلاث كرات من الصندوق بدون إرجاع

١ – أوجد احتمال اختيار كرتين بيضاء وكرة حمراء .

٢ – أوجد احتمال اختيار كرتين حمراء وكرة بيضاء .

٣ – أوجد احتمال اختيار ثلاث كرات من نفس اللون .

٤ – أوجد احتمال اختيار 3 كرات مختلفة الألوان .

٥ – أوجد احتمال اختيار 3 كرات من لونين فقط .

٨٩- صندوق يحتوى على 9 كرات بيضاء ، 8 كرات سوداء ، 7 كرات حمـراء ونريـد سحب مجموعة من أربعة كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع

١ – أوجد احتمال اختيار 2 كرة بيضاء و 2 كرة سوداء .

٢ – أوجد احتمال اختيار 2 كرة حمراء و 2 كرة سوداء .

٣ – أوجد احتمال اختيار 3 كرة بيضاء وكرة سوداء .

٤ – أوجد احتمال اختيار 4 كرات من نفس اللون .

٥ – أوجد احتمال اختيار 3 كرات من نفس اللون ضمن المجموعة .

٩٠- سحبت 3 كرات من صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء وكرتـان حمـراء . أوجـد احتمال ما يأتي :

١ – كرتان بيضـاء وكرة حمراء .

٢ – الكرات من نفس اللون .

٣ – على الأقل واحدة بيضاء .

٤ – على الأقل واحدة بيضاء .

وذلك في حالة السحب بإرجاع ثم فى حالة السحب بدون إرجاع .

٩١– يحتوى كيس على 15 قطعة نقود منها 6 ذهبية والباقي فضية ، سحبت قطعتين من الكيس عشوائيا . نفرض الحدث A سحب قطعتين فضيتين ، الحدث B سحب قطعتين ذهبيتين ، الحدث C سحب قطعة ذهبية واحدة على الأقل والحدث D سحب قطعة فضية واحدة على الأقل أوجد الاحتمالات $P(A) , P(B) , P(C) , P(D)$ في كل من الحالات الآتية :

١ – سحب القطعتين معا .

٢ – سحب القطعتين واحدة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – سحب القطعتين واحدة بعد الأخرى مع الإحلال .

٩٢– سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من صندوق يحتوى على 10 ورقات مرقمة بالأعداد من 1 إلى 10 . أوجد احتمال أن يكون مجموعها عدد أولى إذا

١ – تم سحب الورقتين معا .

٢ – تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

٩٣– صندوق يحتوى على 30 مصباح كهربائي منها 3 مصابيح معيبة . اختيرت عينة عشوائية تتكون من 5 مصابيح كهربائية . أوجد احتمال ما يأتي :

١ – أن يكون في العينة مصباح واحد معيب .

٢ – أن تكون المصابيح في العينة جميعها سليمة .

٣ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل معيب .

٤ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل سليم .

٥ – أن يكون عدد المصابيح السليمة في العينة اكبر من المعيبة .

٩٤– مجموعة من 10 أشخاص ذهبت لصيد السمك وعند عودهم كان عدد السمك الذى تم اصطياده 8 سمكات فقط ، وبفرض أن جميع الاشخاص لهم نفس الفرصة في صيد السمك أوجد احتمال أن السمكات الثمانية تم اصطيادها بثمانية اشخاص مختلفين . أوجد كذلك احتمال أن السمكات الثمانية تم اصطيادها بواسطة شخص واحد فقط .

٩٥- في تجربة سحب أربعة ورقات من أوراق اللعب (الكوتشينة) علـــى التـــوالي وبـــدون إرجاع ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الأوراق الأربعة جميعها صور .

٢ - الأوراق الأربعة ليس بها صور .

٣ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام اكبر من 4 .

٤ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام زوجية .

٥ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام فردية .

٦ - الأوراق الأربعة بها ورقتان صور وورقتان لأرقام اكبر من 8 .

٧ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام مختلفة .

٨ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام متساوية .

٩ - الحصول على صورة ولد واحد على الأكثر .

١٠ - الحصول على صورة ولد واحد على الأقل .

٩٦- أوجد احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لعدد 30 من الطلاب المتواجدين في قاعة الدرس وذلك بفرض أن جميع السنوات 365 يوما .

٩٧- في حفلة عيد ميلاد ماريان في 20 من شهر فبراير حضر 15 من صديقاهما إلى الحفل .

١ - أوجد احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لكل من ماريان وصديقاهما .

٢ - أوجد احتمال أن تكون أحد صديقاهما على الأقل لها نفس تاريخ ميلاد ماريان .

٩٨- في حفل زواج أحد الأشخاص في يوم 8 سبتمبر من عام 1983 حضـــر إلى قاعـــة الحفل 32 رجل وكل منهم معه زوجته . أوجد احتمال

١ - أن الأزواج الحاضرون بالحفل يحتفلون بأعياد زواجهم في أيام مختلفة في السنة .

٢ - وجود اثنين على الأقل من المدعوين الرجال بالحفل ولهما نفس يوم الزواج.

٣ - أن أحد المدعوين الرجال على الأقل سوف يحتفل بذكرى زواجه في هـــذا اليـــوم الثامن من سبتمبر .

٩٩– يجلس n من الاشخاص في قاعة ، أوجد احتمال وجود 2 على الاقل لهم نفس شـــهر الميلاد . احسب هذا الاحتمال في حالة $n = 2 , 3 , 5 , 10$.

١٠٠–رجل لديه 6 أطفال أربعة منهم ذكور والباقي إناث . أوجد

١ – احتمال وجود اثنين على الأقل من الأطفال ولهما نفس يوم الميلاد.

٢ – احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة للأطفال الذكور .

٣ – احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة للأطفال الإناث .

٤ – احتمال أن أعياد ميلاد الأطفال الستة تقع في شهور مختلفة من السنة .

١٠١–كتب أحد الأشخاص 5 من الخطابات الشخصية إلى 5 من الأصدقاء ووضع كــــل خطاب في ظرف بريد وأغلقه بدون كتابة العناوين ثم بدء بعد ذلك بطريقة عشــوائية في كتابة 5 من العناوين على هذه المظاريف . أوجد احتمال وجود خطاب واحد علـــى الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط .

١٠٢– في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خــــط الأعــداد نفرض النقطتان $c,d \in]a,b[$ بحيث أن $a<c<d<b$ ونفرض الأحداث

$$A_1 = \{ x : a \le x < c \} = [a , c [$$
$$A_2 = \{ x : c \le x < d \} = [c , d [$$
$$A_3 = \{ x : d \le x \le b \} = [d , b]$$

أوجد احتمال كل من الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 .

١٠٣–اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $(-1000 , 1000)$ أوجد احتمـــال أن تكون عدد صحيح .

١٠٤– إذا كان عدد الدقائق لردة الفعل عند حيوان معين على حادث معـــين يكـــون عـــدد عشوائي بين دقيقتين وثلاث دقائق ونصف . أوجد احتمال أن ردة الفعل عنــــد هـــذا الحيوان عند وقوع هذا الحدث مرة أخرى لن تزيد عن ثلاث دقائق .

١٠٥- في حديث مع مدير المكتبة الإكاديمية قال انه من واقع خبرته الطويلة فى مجـــال بيـــع الكتب بالمكتبة فإن كل كتاب جديد لمؤلف معين معروف لديه يحقق نسبة بـــين 4% إلى 12% من جملة المبيعات للمكتبة خلال ستة شهور. أوجد احتمال أن الكتـــاب القادم لهذا المؤلف سوف يحقق على الأكثر 6.35% من جملة المبيعـــات للمكتبـــة خلال ستة شهور .

١٠٦-اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة ، أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى محيط الدائرة منها إلى مركز الدائرة .

١٠٧- مستطيل طوله 10cm وعرضه 8 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المستطيل أوجد احتمال أن تكون النقطـــة أقرب بمقدار 2 cm عن مركز المستطيـــل .

١٠٨-حدث عطل لسيارة أثناء السفر من مدينة A إلى مدينة B البعد بينهما 300 كيلومتر أوجد احتمال أن العطل حدث بعد مرور السيارة بالمدينة C الواقعة في ثلث المســـافة من المدينة A إلى مدينة B .

١٠٩- تصل حافلة (أتوبيس) إلى أحد المحطات كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثانيـــة والساعة الثانية والنصف ظهرا ، إذا وصل شخص إلى المحطة الساعة الثانية ظهرا تمامـــا فأوجد احتمال أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 15 دقيقة .

١١٠- مكالمة تليفونية من شخص ما يتم الانتظار لاستقبالها بين الســـاعة 7:00 والســـاعة 7:30صباحا من كل يوم . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - وصول المكالمة خلال ربع ساعة بعد السابعة .

٢ - وصول المكالمة في مدة لا تزيد عن خمس دقائق بعد السابعة والربع .

٣ - فترة الانتظار اقل من 10 دقائق .

٤ - فترة الانتظار أكبر من 10 دقائق .

١١١– اتفق صديقان على أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة الخامسة والساعة الخامسة والربع على أن ينتظر الشخص الذي يصل أولا مدة خمسة دقائق فإذا لم يأتي الشخص الآخر يترك الشخص الذي وصل أولا المكان ، فإذا افترضنا أن وقت وصول كل منهما عشوائي فما هو احتمال انهما لن يلتقيان .

١١٢– في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على أو داخل سطح الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ في الفراغ والمحدودة بالمستويات $z=5$, $z=0$ أوجد احتمال أن تكون النقطة اقرب إلى قاعدة الاسطوانة منها إلى قمتها .

١١٣– خزان مياه على شكل اسطوانة نصف قطرها 10 متر وارتفاعها 8 متر ويراد اختيار قطرة ماء من داخلها بشكل عشوائي . أوجد احتمال أن تكون قطرة الماء هذه ابعد بمقدار 1 متر عن محور تماثل الخزان وعن كل من السطح العلوي والسفلي للخزان .

١١٤– في تجربة اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح الأسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ والمحدودة بالمستويات $z=9$, $z=1$ أوجد احتمال الحدث

$$A_1 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 1 \le z < 3 \}$$

١١٥–أيا من العبارات الآتية صواب وأيها خطأ وإذا كانت العبارة صواب أثبتها وإذا كانت خطأ أعطى مثال مضاد

١–إذا كان A حدث ما بحيث أن $P(A) = 1$ فإن الحدث A يكون هو فضاء العينة.

٢–إذا كان B حدث ما بحيث أن $P(B) = 0$ فإن $B = \Phi$.

الفصل

4

الاحتمال المشروط والاستقلال

Conditional Probability and Independence

١ - الاحتمال المشروط Conditional Probability

دراسة الاحتمال المشروط تعنى حساب احتمال حدث ما إذا عُلم حدث آخر ، فإذا كان A , B حدثان في فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما ، وقبل أن نعلم أي شيء عن وقوع الحدث B فإن احتمال وقوع الحدث A هو $P(A)$ ويسمى بالاحتمال الغير مشروط للحدث A وللاختصار يسمى احتمال الحدث A ، أما إذا كان لدينا معلومات إضافية عن وقوع الحدث B فإن معرفة هذه المعلومات قد تؤثر بشكل فعلي على احتمال وقوع الحدث A . وفي كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع حدث A بشرط وقوع حدث آخر B ويسمى هذا بالاحتمال المشروط ويرمز له بالرمز $P(A|B)$ ، أي احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B ، وللتعرف على مفهوم الاحتمال المشروط نستعرض هذا المثال التوضيحي :

نفرض m من الطلاب نجح منهم 90% في امتحان مقرر الاحتمالات ، 80% في امتحان مقرر الهندسة ونجح 70% في المقررين معاً ، تم اختيار طالب عشوائياً من هذه المجموعة من الطلاب ووجدنا انه ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات ، والسؤال الآن هو ما احتمال أن هذا الطالب الذي اخترناه عشوائياً يكون ناجح في مقرر الهندسة ؟ وللإجابة على هذا السؤال نفرض A هو الحدث أن الطالب ناجح في امتحان مقرر الهندسة ونفرض B هو الحدث أن الطالب ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات ونلاحظ أن المطلوب ليس حساب $P(A)$ فنحن نعلم أن $P(A) = 0.8$ وكذلك نعلم أن $P(A \cap B) = 0.7$, $P(B) = 0.9$ ولكن المطلوب هو حساب $P(A|B)$. ولإيجاد ذلك نلاحظ أن عدد الطلاب الذين نجحوا في امتحان مقرر الاحتمالات يساوى $(0.9)m$ وعدد الطلاب الذين نجحوا في

امتحان مقرر الهندسة يساوى $(0.8)\ m$ وعدد الطلاب الذين نجحوا في المقررين معاً يساوى $(0.7)\ m$ ، أي انه من بين $(0.9)m$ طالب ناجح في امتحان مقرر الاحتمـــالات يوجــد $(0.7)\ m$ طالب ناجح في امتحان مقرر الهندسة ، وحيث أن الطـــالب الـــذي تم اختيـــاره عشوائياً ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات أي انه من ضمن $m(0.9)$ إذن احتمال أن هــذا الطالب يكون ناجح في امتحان مقرر الهندسة أي انه من ضمن الذين نجحوا في المقررين معــــاً وعددهم $(0.7)\ m$ يعطى كالآتي :

$$P(A|B) = \frac{(0.7)\ m}{(0.9)\ m} = \frac{0.7}{0.9}$$

وحيث أن $P(A \cap B) = 0.7$, $P(B) = 0.9$ ، إذن هذا المثال يقـــدم لنـــا اقـــتراح لحساب $P(A|B)$ وهذا الاقتراح يمكن تمثيله بالعلاقة الآتية :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ويمكن التحقق من هذه العلاقة لأنواع أخرى من الاحتمال المشروط ، وهذه العلاقة بديهيـــة وتتفق مع إدراكنا لمعنى الاحتمال وهى تعتبر بمثابة تعميم منطقي للعلاقة الموجودة بالفعل والـــتي تربط التكرار النسبي المشروط للحدث A بالنسبة للشرط B من جهة والتكـــرار النســـبي للحدث $A \cap B$ بالنسبة للتكرار النسبي للحدث B من جهة أخرى ولهذا السبب تم اتخاذ هذه العلاقة كتعريف للاحتمال المشروط .

تعريف ١ :الاحتمال المشروط Conditional Probability

إذا كان A , B حدثان في فضاء عينة S وكان $P(B) > 0$ فـــإن الاحتمـــال المشروط للحدث A إذا عُلم B أو بصيغة أخرى احتمـــال وقـــوع الحـــدث A بشرط وقوع الحدث B هـــو

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

وفى حالة $P(B) = 0$ فإنه لا يوجد معنى للاحتمال المشروط وذلك لأنه في هـــذه الحالـــة الحدث B يكون حدث مستحيل وهذا يتعارض مع حساب احتمال A بشرط وقـــوع B ، ولذلك فإن الاحتمال المشروط $P(A|B)$ يكون مُعرف فقط إذا كـــان $P(B) > 0$.

وتعريف الاحتمال المشروط يمكن صياغته بالقول أن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقـوع الحدث B هـو النسبة بين احتمال الوقوع المشترك للحدثين A , B واحتمال الحدث B ، ومن الضروري أن نؤكد ملاحظة هامة وهى أن العلاقة $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ليست مُسلمة كما أنها ليست بنظرية ولكنها فقط تعريف ، وكما وضحنا فـإن هـذا التعريـف تم التحقق منه بالكامل ولم يوضع اعتباطاً .

مـلاحظات : لأي حدث A فإن

$$(1)\quad P(\Phi|A)=\frac{P(\Phi\cap A)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

$$(2)\quad P(S|A)=\frac{P(S\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

مثـال ١ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة . إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أكبر من 3 ، فما احتمال أن يكون عدد زوجي ؟

الحـل :

نفرض أن الحدث A هو ظهور عدد زوجي ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 .

المطلوب هو إيجاد $P(A|B)$.

وحيث أن

$$A=\{2,4,6\}\quad,\quad B=\{4,5,6\}\quad,\quad A\cap B=\{4,6\}$$

إذن

$$P(B)=\frac{3}{6}\quad,\quad P(A\cap B)=\frac{2}{6}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$

مثـــال ٢ :

نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A)=\frac{1}{2} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(B|\ A')=\frac{1}{4}$$

أوجد $P(A|\ B')$, $P(A|\ B)$.

الحـــل :

حيث أن

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(B|\ A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}$$

إذن

$$P(B\cap A')=P(B|\ A')\ P(A')=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

وحيث أن

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

إذن

$$P(B)=P(B\cap A')+P(A\cap B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/3}{11/24}=\frac{8}{11}$$

ولحساب $P(A|\ B')$

$$P(A|\ B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')} \qquad P(B')=1-P(B)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

إذن

$$P(A|\ B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{1/6}{13/24}=\frac{4}{13}$$

مثـــال ٣ :

في مدينة ما ومن مجموعة العائلات التي لديها طفلان تم اختيار عائلة عشوائياً ووجد أن هـــذه العائلة لديها بنتاً ، وبفرض أن احتمال وجود ولد يكون متساوي مع احتمال وجود بنـــت ، فأوجد احتمال أن الطفل الآخر في هذه العائلة يكون ولداً .

الحل : بفرض أن الرمز b يعنى ولد(boy) والرمز g يعنى بنت (girl) ومع مراعاة الأسـبقية في الولادة فإنه في العائلة التي لديها طفلان يكون فضاء العينة $S = \{bb , bg , gb , gg\}$ حيث bg تعنى أن الطفل الأكبر هو الولد بينما الطفل الأصغر هو البنت ، واحتمـــال كـــل عنصر من فضاء العينة يساوى $\frac{1}{4}$. نفرض الحدث A هو أن الطفل الآخـــر ولـــد أي أن العائلة لديها ولد وبنت ، $A = \{bg , gb\}$ ونفرض الحدث B هو أن العائلـــة لديـــها بنت، أي أن $B = \{bg , gb , gg\}$. إذن المطلوب هو حساب احتمال أن يكون الطفل الآخر ولد بشرط أن العائلة لديها بنت أي أن المطلوب هو حساب $P(A|B)$. وحيـــث أن $A\cap B$ هو الحدث أن الطفل الآخر ولد والعائلة لديها بنت ، وبالتالي

$$A\cap B = \{bg , gb\} \quad , \quad P(A\cap B) = \frac{2}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

وبالتعويض في تعريف الاحتمال المشروط ، إذن $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$

مثـــال ٤ :

في مدينة ما كان احتمال أن يعيش أي شخص لمدة 80 عام علـــى الأقـــل يســـاوى 0.56 واحتمال أن يعيش لمدة 90 عام على الأقل يساوى 0.21 ، تم اختيار شخص عشوائياً مـــن هذه المدينة ووجد أن عمره 80 عام فما هو احتمال أن يبقى هذا الشخص على قيد الحيـــاة حتى يصل به العمر إلى 90 عام .

الحل : نفرض الحدث B هو أن الشخص الذي تم اختياره كـــان عمـــره 80 عـــام وأن الحدث A هو أن الشخص الذي تم اختياره يبقى على قيد الحياة حتى يصل به العمـــر إلى 90 عام ، وحيث أن مجموعة الأشخاص الذين يصل بهم العمر إلى 90 عام هي مجموعة جزئية مـــن مجموعة الأشخاص الذين يصل بهم العمر إلى 80 عام ، إذن $A\cap B = A$ وبالتالي

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.56} = \frac{3}{8}$$

ومن الخصائص الهامة للاحتمال المشروط هو انه يحقق مسلمات نظرية الاحتمال ، وبالتالي هـذا يُمكننا من استخدام النظريات المتحققة فى الاحتمالات على الاحتمال المشروط .

نظرية ١ :

نفرض أن S هو فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، ونفرض الحدث B من فضاء العينـــة S حيث $P(B) > 0$ ، إذن

١ – لأي حدث A من فضاء العينة S فإن $P(A|B) \geq 0$

٢ – $P(S|B) = 1$

٣ – إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ متتابعة من الأحداث المتنافية ، فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

البرهان :

١ – من تعريف الاحتمال المشروط $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ وحيث أن

$$P(A \cap B) \geq 0 \quad , \quad P(B) \geq 0$$

إذن $P(A|B) \geq 0$.

٢ – من تعريف الاحتمال المشروط

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

٣ – حيث انه إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ أحداث متنافية فإن $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots$ تكون أيضاً أحداث متنافية ، ومن تعريف الاحتمال المشروط

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

والآن كحالة خاصة ، إذا كان S فضاء احتمال منتظم من النوع المنتهى أي أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية في احتمال حدوثها وبفرض أن A , B حدثان في فضاء العينة S بحيث أن $P(B)>0$ ، إذن من تعريف الاحتمال المشروط فإن

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ وحيث أن S فضاء احتمال منتهى منتظم ، إذن

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)} \quad , \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$$

حيث الرمز $n(S)$ يرمز إلى عدد عناصر S ، إذن الاحتمال المشروط للحدث A إذا عُلم B أو بصيغة أخرى احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يمكن التعبير عنه في هذه الحالة بالصورة $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$ وإذا كان S فضاء احتمال منتظم من النوع اللانهائي الغير قابل للعد فإن المقياس الهندسي المحدود المستخدم في هذه الحالة يحل مكان عدد العناصر ، وبالتالي يمكننا صياغة الآتي :

- إذا كان A , B حدثان في فضاء احتمال منتظم من النوع المنتهى وكان $P(B)>0$ فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يكون

$$P(A|B)=\frac{\text{عدد عناصر الحدث } A\cap B}{\text{عدد عناصر الحدث } B}$$

وبصورة أخرى :

$$P(A|B)=\frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث } A\cap B}{\text{عدد طرق وقوع الحدث } B}$$

- إذا كان A , B حدثان في فضاء احتمال منتظم من النوع اللانهائي الغير قابل للعد وكان $P(B)>0$ فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يكون $P(A|B)=\dfrac{m(A\cap B)}{m(B)}$ حيث m يمثل المقياس الهندسي وقد يكون هذا المقياس هو قياس طول فترة على خط الأعداد أو قياس طول فترة زمنية أو قياس مساحة أو حجم .

مثـــال ٥:

في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات على التوالي إذا عُلم أنه في الرمية الأولى ظهر وجه الصورة فما احتمال أن يكون الوجهان في الرميتان الأخرتان صورتان .

الحل : فضاء العينة $S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$

نفرض B هو الحدث أن الوجه في الرمية الأولى صورة ونفرض A هو الحدث أن الوجهان في الرميتان الأخرتان صورتان فيكون المطلوب هو حساب $P(A| B)$.

$B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A = \{HHH, THH\}$, $A \cap B = \{HHH\}$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٦: نفرض أن فضاء العينة S يمثل مجموعة من الأشخاص في مدينة صغيرة والذيـــن أكملوا تعليمهم الجامـــعي وموزعين كما موضح بالجدول الآتي :

	يعمل W	لا يعمل N	المجموع
رجال A	460	40	500
إناث B	140	260	400
المجموع	600	300	900

فإذا تم اختيار شخص عشوائيا من هذه المجموعة ، أوجد احتمال ما يأتي :

١– أن يكون رجل إذا علمنا أنـــه يعمل .

٢– أن تكون أنثى إذا علمنا أنها لا تعمل .

الحل : نفرض الحدث A هو اختيار رجل والحدث B هو اختيار أنثى والحـــدث W هـــو اختيار شخص يعمل والحدث N هو اختيار شخص لا يعمل

1 - $P(A|W) = \frac{n(A \cap W)}{n(W)}$, $n(A \cap W) = 460$, $n(W) = 600$

$$P(A|W) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

2 - $P(B|N) = \frac{n(B \cap N)}{n(N)}$, $n(B \cap N) = 260$, $n(N) = 300$

$$P(B|N) = \frac{260}{300} = \frac{13}{15}$$

مثـــال ٧ :

في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين ، أوجد احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجـــهين اكبر من 9 في كل من الحالات الآتية :

١ – إذا ظهر العدد 6 على حجر النرد الأول .

٢ – إذا ظهر العدد 6 على حجر واحد على الأقل .

٣ – إذا ظهر العدد 6 على حجر واحد على الأكثر .

الحـــل :

نفرض أن الحدث A هو أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين اكبر من 9 . إذن

$$A = \{ (4,6) , (6,4) , (5,5) , (5,6) ,(6,5) , (6,6) \}$$

١ – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجر النرد الأول . إذن

$$B = \{ (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) ,(6,5) , (6,6) \} \quad , \quad n (B) = 6$$

$$A \cap B = \{ (6,4) , (6,5) , (6,6) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 3$$

$$P \left(A \middle| B\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

٢ – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجر واحد على الأقل . إذن

$$B = \{ (1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) ,(5,6) , (6,6)$$

$$(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) ,(6,5) \} \quad , \quad n(B) = 11$$

$$A \cap B = \{ (4,6) , (6,4) , (5,6) ,(6,5) , (6,6) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 5$$

$$P \left(A \middle| B\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{11}$$

3 – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجـــر واحـــد علـــى الأكـــثر ، إذن الحدثB هو مكملـــة الحـــدث ظـــهور 6 علـــى كـــل مـــن الحجريـــين أي انـــه $\{ (6,6) \}'$ وحيـث أن عدد عناصر فضاء العينة يساوى 36 ، إذن

$$n(B) = n(\{ (6,6) \}') = 35$$

$$A \cap B = \{ (4,6) , (6,4) , (5,5) , (5,6) ,(6,5) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 5$$

$$P \left(A \middle| B\right) = \frac{n (A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

مثـــال ٨:

تصل حافلة إلى محطة ما يوميا في وقت عشوائي بين الساعة 6:00 والساعة 6:30 صباحـــا ، وصل شخص إلى المحطة في الساعة 6:00 صباحا وانتظر الحافلة حتى الساعة 6:10 ولم تصـل فما هو احتمال أن تصل الحافلة خلال 5 دقائق أخرى على الأكثر .

الحـــل :

نفرض الحدث A هو أن الحافلة تصل بين الساعة 6:10 والساعة 6:15 ونفرض الحـــدث B هو أن الحافلة تصل بين الساعة 6:10 والساعة 6:30 . إذن الحدث A يمثل فترة زمنية طولها 5 دقائق من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:15 والحدث B يمثل فترة زمنية طولهـا 20 دقيقة من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:30 وبالتالي فإن الحدث $A \cap B$ يمثل فترة زمنيـــة طولها 5 دقائق من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:15 والمقياس المستخدم هو طـــول الفـــترة الزمنية ، إذن $P(A|B) = \dfrac{m(A \cap B)}{m(B)} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.

مثـــال ٩ :

مزرعة سمكية صغيرة بها 105 سمكة بينها 40 من سمك السلمون والباقي من سمك البلطي ، وضعت شبكة صغيرة فاصطادت 8 سمكات . أوجد احتمال أن أثنين منها من نوع الســـلمون إذا علمت انه على الأقل 3 منها من نوع البلطي .

الحل : نفرض أن A هو الحدث أن أثنين من السمكات الثمانية بالشبكة من نوع الســـلمون وهذا يعنى أن 6 منهم من نوع البلطي ، ونفرض B هو الحدث انه على الأقل 3 منها مـــن نوع البلطي ، أي أن B هو الحدث أن عدد السمك البلطـــي بالشـــبكة يكـــون x حيـــث $3 \le x \le 8$ وبالتالي فإن الحدث $A \cap B$ هو أن عدد السمك البلطي بالشبكة يكـون $x = 6$ والمطلوب هو حساب $P(A|B)$. إذن

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{65}{6}\binom{40}{2}}{\binom{105}{8}} = 0.231072 \quad , \quad P(B) = \sum_{x=3}^{8} \frac{\binom{65}{x}\binom{40}{8-x}}{\binom{105}{8}} = 0.966743$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.231072}{0.966743} = 0.239021 \quad .$$

مثـــال ١٠:

في تجربة سحب كارت عشوائياً من مجموعة من 100 كارت مرقمة $00,01,02,\ldots,99$ إذا علمت أن حاصل ضرب أرقام العدد على الكارت المسحوب يساوي 0 فأوجد احتمال أن مجموع أرقام العدد على الكارت المسحوب يساوي k لأي عدد صحيح $0 \le k \le 18$.

الحـــل :

نفرض B هو الحدث سحب كارت بحيث أن حاصل ضرب أرقام العدد الذي يظهر علـــى الكارت المسحوب يساوي 0 وأن A_k هو الحدث سحب كارت بحيث أن مجموع أرقـــام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب يساوي k إذن

$$B = \{ 00 , 01 , 02 , \ldots , 09 , 10 , 20 , \ldots 90 \}$$

$$n(B) = 19 \quad , \quad n(S) = 100$$

ومن تعريف الحدث A_k فإن أقل قيمة يأخذها k هي $k=0$ ونحصل عليها من مجمـــوع أرقام العدد 00 واكبر قيمة يأخذها k هي $k=18$ ونحصل عليها من مجموع أرقام العدد 99 وبالتالي فإن قيم k تكون الأعداد الصحيحة $0 \le k \le 18$. إذن

$$A_k \cap B = \begin{cases} \{00\} & , \quad k=0 \\ \{0k , k0\} & , \quad 0 < k \le 9 \\ \Phi & , \quad 9 < k \le 18 \end{cases}$$

وبالتالي

$$n(A_k \cap B) = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ 2 & , \quad 0 < k \le 9 \\ 0 & , \quad 9 < k \le 18 \end{cases}$$

إذن

$$P(A_k | B) = \frac{n(A_k \cap B)}{n(B)} = \begin{cases} \frac{1}{19} & , \quad k=0 \\ \frac{2}{19} & , \quad 0 < k \le 9 \\ 0 & , \quad 9 < k \le 18 \end{cases}$$

٣ – فضاء العينة المختزل Reduced Sample Space

نفرض الحدث B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما حيث $P(B) > 0$ ، لأي مجموعة جزئية E من B نعرف الدالة Q كالآتي :

$$Q(E) = P(E \mid B)$$

إذن الدالة Q هي دالة من عائلة المجموعات الجزئية من B إلى الفترة المغلقة $[0,1]$ ، ومن الواضح أن الدالة Q تحقق ما يأتي :

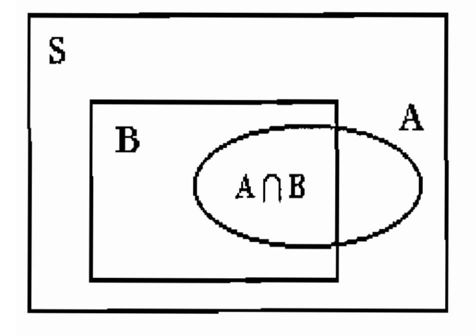
أولاً : لأي حدث E من B فإن $Q(E) \geq 0$ وهذا يحقق المسلمة الأولى للاحتمالات

ثانياً : $Q(B) = P(B \mid B) = 1$ وهذا يحقق المسلمة الثانية للاحتمالات

ثالثاً : إذا كان $E_1, E_2, \ldots$ متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية المأخوذة من B فإن

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(E_i)$$

إذن الدالة Q تحقق مسلمات نظرية الاحتمال وبالتالي فإن Q هي دالة احتمال ، ونلاحظ انه بينما الدالة P هي دالة احتمال معرفة لجميع المجموعات الجزئية من S فإن الدالة Q هي دالة احتمال معرفة فقط لجميع المجموعات الجزئية من B ، وبناء على ذلك فإنه للدالة Q تم اختزال فضاء العينة ليصبح B بدلا من S وفى هذه الحالة فإن B يسمى بفضاء العينة المختزل ، وهذا الاختزال لفضاء العينة يكون مفيد جدا في حساب الاحتمال المشروط ، وبالتالي فإن الاحتمال المشروط $P(A \mid B)$ حيث $A \subseteq S$ يمكن حسابه عن طريق اختزال فضاء العينة S إلى B ثم حساب $Q(A \cap B)$ كما موضح بالشكل .



ومما لا شك فيه أن حساب الاحتمال الغير مشروط $Q(A \cap B)$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B يكون اسهل بكثير من حساب الاحتمال المشروط $P(A \mid B)$ بالنسبة لفضاء العينة S .

مثـــال ١١ :

في مزرعة ما يوجد 13 رأس من الغنم 3 منها مصابة بجرثومة الحمى . لاســـتبعاد الأغنـــام المصابة تم اختيار الغنم واحدة بعد الأخرى فإذا وجدنا أن الأغنـــام الأربعـــة الأولى الـــتي تم اختيارها جميعها سليم فما هو احتمال أن الاختيار الخامس يكون أحد الأغنام المصابة .

الحـــل :

عدد الأغنام السليمة 10 وعدد الأغنام المصابة 3 وحيث أن الأغنام الأربعة الأولى الـــتي تم اختيارها جميعها سليم ، إذن فضاء العينة S الذي به 13 رأس من الغنم (عدد 10 سليم وعدد 3 مصاب) يمكن اختزاله إلى فضاء العينة B الذي به 9 من الأغنام (عدد 6 سليم وعدد 3 مصاب) وحيث أن المطلوب هو احتمال أن الاختيار الخامس يكون أحد الأغنـــام المصابة ، إذن يمكن الآن إعادة صياغة المسألة في فضاء العينة المختزل B بالصورة الآتية :

" من بين 9 من الأغنام (عدد 6 سليم وعدد 3 مصـــــاب) تم اختيار أحد الأغنام فما هو احتمال أن يكون من الأغنام المصابة "

إذن الاحتمال p المطلوب يكون $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. ونلاحظ في هذا المثال مدى السهولة في الحل نتيجة للتعامل مع فضاء العينة المختزل والذي بدونه لن يكون الحل بمثل هذه السهولة .

مثـــال ١٢:

عائلة لديها ثلاثة أطفال ، مع مراعاة الأسبقية في الولادة أوجد :

١- احتمال أن يكون للعائلة ولد واحد فقط بشرط أن يكون الطفل الأكبر بنت .

٢- احتمال أن يكون للعائلة ولدا واحد على الأقل إذا عُلم أن الطفل الأكبر بنت .

٣- احتمال أن يكون للعائلة بنتان إذا عُلم أن الطفل الأكبر ولد .

٤- احتمال أن يكون للعائلة بنت على الأكثر إذا عُلم أن أحد الطفلين الأكبر أو الأوسط ولد

الحـــل :

بفرض أن الرمز b يعني ولد (boy) والرمز g يعني بنت (girl) ومع مراعاة الأســـبقية في الولادة فإنه في العائلة التي لديها ثلاثة أطفال يكون فضاء العينة

$$S = \{ bbb\ , bbg\ , bgb\ , bgg\ , gbb\ , gbg\ , ggb\ , ggg \}$$

حيث bgg تعني أن الطفل الأكبر ولد والطفل الأوسط بنت والطفل الأصغر بنت .

١– نفرض الحدث A أن يكون للعائلة ولد واحد فقط ، أي أن $A=\{bgg,gbg,ggb\}$

ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر بنت وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن

$$B=\{gbb\ ,gbg\ ,ggb\ ,ggg\}\quad ,\quad A\cap B=\{gbg\ ,ggb\}$$

المطلوب هو $P(A\,|\,B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A\cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B

إذن $P(A\,|\,B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

٢– نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة ولدا واحد على الأقل ، أي أن يكون لدى العائلة إما ولد وبنتان أو ولدان وبنت أو ثلاثة أولاد ، أي أننا نستبعد أن يكون الثلاث أطفال بنات ،

إذن $A=\{bbb\ ,bbg\ ,bgb\ ,bgg\ ,gbb\ ,gbg\ ,ggb\}$

ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر بنت وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن

$$B=\{gbb\ ,gbg\ ,ggb\ ,ggg\}\quad ,\quad A\cap B=\{gbb\ ,gbg\ ,ggb\}$$

المطلوب هو $P(A\,|\,B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A\cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B

إذن $P(A\,|\,B)=\dfrac{3}{4}$.

٣ – نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة بنتان $A=\{bgg\ ,gbg\ ,ggb\}$

ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر ولدا وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن

$$B=\{bbb\ ,bbg\ ,bgb\ ,bgg\}\quad ,\quad A\cap B=\{gbb\}$$

المطلوب هو $P(A\,|\,B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A\cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B

إذن $P(A\,|\,B)=\dfrac{1}{4}$.

٤ – نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة بنت على الأكثر ، أي أن يكون لدى العائلة إما ولدان وبنت أو ثلاثة أولاد $A=\{bbb\ ,bbg\ ,bgb\ ,gbb\}$ ونفرض الحدث B هو أن يكون أحد الطفلين الأكبر أو الأوسط ولد وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن

$$B=\{bbb,bbg,bgb,bgg,gbb,gbg\}\ ,\ A\cap B=\{bbb,bbg,bgb,gbb\}$$

المطلوب هو $P(A\,|\,B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A\cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B

إذن $P(A\,|\,B)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

مثـــال ١٣:

قام رجل بزيارة عائلة لديها طفلان ، ودخل أحد الطفلين إلى الغرفة وكـــان ولـــدا ، أوجـــد الاحتمال p أن يكون الطفل الآخر ولدا إذا كان

١ – من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر .

٢ – ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر .

الحـــل :

بفرض أن الرمز b يعنى ولد والرمز g يعنى بنت ومع مراعاة الأسبقية في الولادة فإنـــه في العائلة التي لديها طفلان يكون فضاء العينة

$$S = \{ bb , bg , gb , gg \}$$

حيث bg تعنى أن الطفل الأكبر هو الولد بينما الطفل الأصغر هو البنت .

١ – حيث انه من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر فهذا يعنى أن الطفل الـــذي دخـــل إلى الغرفة هو الأكبر بالإضافة إلى انه ولد لذلك نفرض الحدث B هو أن الطفل الذي دخـل إلى الغرفة هو الأكبر بالإضافة إلى انه ولد ، أي أن فضاء العينة المختزل

$$B = \{ bb , bg \}$$

ونفرض الحدث A هو أن الطفل الآخر ولد ، أي أن $A=\{bb\}$ ، إذن $A \cap B = \{bb\}$

وبالتالي فإن الاحتمال p أن يكون الطفل الآخر ولد يكون $p = \frac{1}{2}$.

٢ – حيث انه ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر لذلك نفرض الحـــدث B هـــو أن الطفل الذي دخل إلى الغرفة ولد ، أي أن فضاء العينة المختزل

$$B = \{ bb , bg , gb \}$$

ونفرض الحدث A هو أن الطفل الآخر ولد ، أي أن $A = \{ bb \}$ ، إذن

$A \cap B = \{bb\}$ وبالتالي فإن الاحتمال p يكون الطفل الآخر ولد يكون $p = \frac{1}{3}$.

٣ - قانون حاصل الضرب للاحتمال المشروط

Multiplication Law for Conditional Probability

يمكن الاستفادة من تعريف الاحتمال المشروط

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

في حساب $P(A \cap B)$ وذلك بضرب الطرفين في $P(B)$ حيث $P(B) > 0$ فنحصل على ما يسمى بقاعدة الضرب

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B) \qquad (I)$$

وإذا كان $P(A) > 0$ فإنه باستبدال A محل B و استبدال B محل A نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) \qquad (II)$$

إذن حساب $P(A \cap B)$ يتوقف على كون أي الحدثان يقع أولاً ، فإذا كان $P(A|B)$ معلوم فإننا نستخدم القانون في المعادلة (I) بينما إذا كان $P(B|A)$ معلوم فإننا نستخدم القانون في المعادلة (II) .

مثال ١٤ :

صندوق يحتوي على 7 وحدات من إنتاج ما بها 2 وحدة معيبة ، تم سحب الوحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع . أوجد احتمال سحب الوحدتين المعيبتين في أول وثاني سحب .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو سحب الوحدة الأولى معيبة والحدث B هو سحب الوحدة الثانية معيبة ، أذن المطلوب هو حساب $P(A \cap B)$ ، ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

وحيث أن $P(B|A) = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{2}{7}$ إذن

$$P(A \cap B) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

مثـال ١٥:

صندوق يحتوى على 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء تم سحب كرتـان مـن الصنـدوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع .أوجد احتمال

١ – أن تكون الكرتان من اللون الأحمر .

٢ – أن تكون الكرتان من نفس اللون .

الحـل :

نفرض الحدث A هو أن الكرة المسحوبة أولا تكون حمراء والحـدث B هـو أن الكـرة المسحوبة ثانيا تكون حمراء .

١ – الحدث أن تكون الكرتان من اللون الأحمر هو $A \cap B$. ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|\ A)$$

وحيث أن $P(B|\ A) = \frac{5}{9}$, $P(A) = \frac{6}{10}$ إذن

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

٢ – الحدث C أن تكون الكرتان من نفس اللون هو أن تكون الكرتان من اللـون الأحمـر $A \cap B$ أو أن تكون الكرتان من اللون الأبيض $A' \cap B'$ حيث A' هو الحدث أن تكـون الكرة المسحوبة أولاً بيضاء وهو مكملة أن تكون حمراء لأن الصندوق به لونان فقط ، B' هـو الحدث أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً بيضاء أي أن

$$C = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

وحيث أن الأحداث $A' \cap B'$ ، $A \cap B$ متنافية ، إذن

$$P(C) = P((A \cap B) \cup (A' \cap B')) = P(A \cap B) + P(A' \cap B')$$

ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A' \cap B') = P(A')\ P(B'|\ A') = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

إذن

$$P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

وقاعدة الضرب في معادلة (II) يمكن تعميمها لحساب احتمال الوقوع المشترك لمجموعة من الأحداث فمثلا ،

في حالة ثلاثة أحداث A_1 , A_2 , A_3 إذا كان $P(A_1 \cap A_2) > 0$ فإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

وللتحقق من ذلك

حيث أن $P(A_1 \cap A_2) > 0$ يؤدى إلى $P(A_1) > 0$

إذن من تعريف الاحتمال المشروط

$$\begin{aligned} P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

والنظرية الآتية تصف تعميم لقاعدة الضرب في حالة n من الأحداث .

نظريـــة ٢ : قانون حاصل الضرب للاحتمال المشروط

لأي مجموعة من الأحداث $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ إذا كان

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}) > 0 \quad \forall \quad 1 < k \leq n$$

فـــإن

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \\ &= P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

مثـــال ١٦ :

صندوق يحتوي على 12 وحـــدة من إنتاج ما بها 4 وحدات معيـــبة ، اختيرت 3 وحـــــدات عشوائياً من الصندوق واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع ، أوجد :

١ – احتمال أن تكون 3 وحدات سليمة .

٢ – احتمال أن تكون الوحدة الأولى والثانية سليمة بينما الثالثة معيبة .

٣ – احتمال أن تكون واحدة على الأقل معيبـــة .

الحـــل :

عدد الوحدات 12	
8	4
سليمة	معيبة

نفرض أن الحدث A_1 هو سحب الوحدة الأولى سليمة

الحدث A_2 هو سحب الوحدة الثانية سليمة

الحدث A_3 هو سحب الوحدة الثالثة سليمة

١ – الحدث أن تكون الوحدات الثلاث سليمة هو $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ، وبالتالي

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P\left(A_2 \middle| A_1\right) P\left(A_3 \middle| A_1 \cap A_2\right)$$

وحيث أن

$$P(A_1) = \frac{8}{12} \quad , \quad P(A_2 \mid A_1) = \frac{7}{11} \quad , \quad P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10}$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

٢ – الحدث أن تكون الوحـــدتان الأولى والثانيـــة ســـليمتان بينما الوحـــــدة الثالثـــة معيبة هو $A_1 \cap A_2 \cap A'_3$ حيث A'_3 هو مكملة الحدث A_3 ويعنى اختيـــار الوحدة الثالثة معيبة ، إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A'_3) = P(A_1)\, P\left(A_2 \middle| A_1\right) P\left(A'_3 \middle| A_1 \cap A_2\right)$$

$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{28}{165}$$

٣ – الحدث أن تكون واحدة على الأقل معيبـــة هو مكملة الحدث أن تكون 3 وحـــــدات سليمة أي انه $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)'$ ، إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)' = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

٤ – الاحتمال الكلي ونظرية بييز

Total Probability and Bayes' Theorem

في بعض الحالات يكون من الصعب أن نحسب مباشرة احتمال وقوع حدث ما B من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ، ولكن من الممكن حساب $P(B|A)$, $P(B|A')$ حيث A حدث آخر من فضاء العينة S ، ولمثل هذه الحالات يمكن استخدام النظرية التالية والتي تعرف بقانون الاحتمال الكلي وهذا القانون يستخدم في العديد من التطبيقات .

نظرية ٣ : قانون الاحتمال الكلي Law of Total Probability

نفرض أن A حدث من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما حيث

$$P(A) > 0 \quad , \quad P(A') > 0$$

إذن لأي حدث آخر B فإن

$$P(B) = P(A)\, P(B|A) + P(A')\, P(B|A')$$

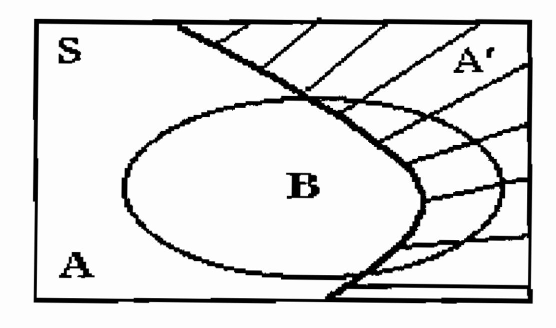
البرهان :

حيث أن A , A' تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = A \cup A' \quad , \quad A \cap A' = \Phi$$

إذن

$$B = S \cap B = (A \cup A') \cap B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$



وحيث أن A , A' أحداث متنافية فإن $A \cap B$, $A' \cap B$ أحداث متنافية ، إذن

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$
$$= P(A)\, P(B|A) + P(A')\, P(B|A')$$

مثـــال ١٧:

صندوقان يحتوى الأول على 20 مصباح كهربائي منها عدد 4 مصـــابيح معيبـــة ويحتـــوى الصندوق الثاني على 30 مصباح كهربائي منها عدد 5 مصابيح معيبة . ألقي حجر نرد متزن مرة واحدة فإذا ظهر وجه يحمل عدد يقبل القسمة على 3 نختـــار عشـــوائياً مصبـــاح مـــن الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني . أوجد احتمـــال أن المصباح الذي تم اختياره يكون معيب .

الحـــل :

نفرض الحدث A هو اختيار مصباح من الصندوق الأول وبالتالي الحدث A' هـــو اختيـــار مصباح من الصندوق الثاني ونفرض أن B هو الحدث اختيار مصباح معيب . إذن الاحتمـــال المطلوب هو $P(B)$ ومن قانون الاحتمال الكلي بنظرية (٣) فإن

$$P(B) = P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A')$$

وحيث أن ظهور وجه يحمل عدد يقبل القسمة على 3 أي ظهور 3 أو 6 يؤدى إلى أن نختـــار عشوائياً مصباح من الصندوق الأول وبالتالي وقوع الحدث A بينما ظهور 1 أو 2 أو 4 أو 5 يؤدى إلى أن نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني وبالتالي وقوع الحدث A' ، إذن

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A') = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B|\ A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad , \quad P(B|\ A') = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A') \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

نظريــة ٤ : قانون الاحتمال الكلي في الحالة العامة

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S لتجربة عشــــوائية حيث $P(A_i) > 0 \quad \forall\, i \in \{1,2, \ldots ,n\}$ وكان B أي حدث آخر في فضاء العينة فإن

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B \mid A_i)$$

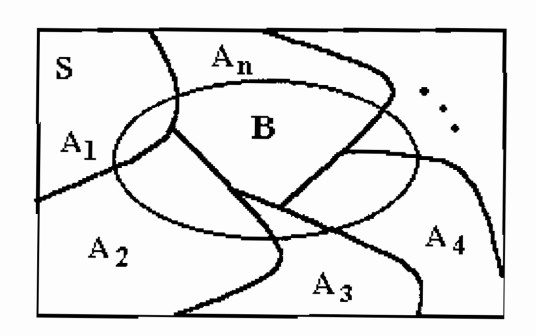
البرهان :

حيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall \quad i \neq j \quad , \quad i, j \in \{1,2, \ldots ,n\}$$

إذن

$$B = S \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$



وحيث أن A_i أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ فإن $A_i \cap B$ أحـــداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. إذن

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B \mid A_i)$$

مثـــال ١٨ :

ثلاث ماكينات تنتـــج على الترتيب 20% ، 30% ، 50% من الإنتـــاج الكلي لأحـد المصانع ، وكانت نسبة إنتاج قطعة تالفـــة من الماكينات الثلاث هي 5% ، 4% ، 3% على الترتيب . إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشوائياً ، فما احتمال أن تكون تالفـــة ؟

الحـــل :

نفرض أن A_1 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الأولى

A_2 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الثانية

A_3 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الثالثة

ونفرض أن الحدث B هو سحب قطعة تالفة

$$P(A_1)=\frac{50}{100}=\frac{5}{10} \quad , \quad P(A_2)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10} \quad , \quad P(A_3)=\frac{20}{100}=\frac{2}{10}$$

$$P(B|A_1)=\frac{3}{100} \quad , \quad P(B|A_2)=\frac{4}{100} \quad , \quad P(B|A_3)=\frac{5}{100}$$

ومن قانون الاحتمال الكلي ، إذن

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(B|A_i) \\ &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{5}{10}\times\frac{3}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{100} \\ &= \frac{15+12+10}{1000} \\ &= \frac{37}{1000} \end{aligned}$$

نظرية ٥ : نظرية بييـــز Bayes' Theorem

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضـــاء العينـــة S وكان $P(A_i) > 0 \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, n$ فإنه لأي حدث B من فضاء العينة S حيث $P(B) > 0$ يكون

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)\, P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B | A_i)}$$

البرهـــان :

من تعريف الاحتمال المشروط ، نعلم أن

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

$$P(A_k \cap B) = P(A_k)\, P(B | A_k) \qquad (2)$$

وحيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall \quad i \neq j \quad , \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

إذن

$$B = S \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

وحيث أن A_i أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ فإن $A_i \cap B$ أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ، وبالتالي

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

بالتـــعويض من (2) نحصل على

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B | A_i) \qquad (3)$$

وبالتعويض من المعادلات (2) ، (3) في المعادلة (1) ينتج المطلوب .

مثـــال ١٩:

في مثال (١٨) إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشوائياً ووجد أنها تالفـــة ، فمـــا هـــو احتمال أن تكون من الماكينة الثانية ؟

الحـــل :

نفرض أن الحدث B هو سحب قطعة تالفة ، إذن المطلوب هو $P(A_2 | B)$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{100}}{\frac{37}{1000}} = \frac{12}{37}$$

مثـــال ٢٠ :

في إحدى كليات التربية بجمهورية مصر العربية يدرس 25 % من الطـــلاب ، 10 % مـــن الطالبات في قسم الرياضيات بالكلية علما بأن 60 % من الدارسين بالكلية من الطالبات . تم اختيار أحد الأشخاص الدارسين بالكلية عشوائياً ووجد انه يدرس في قسم الرياضيـــات فمـــا احتمال أن يكون طالبة .

الحـــل :

نفرض الحدث A أنه تم اختيار طالبة وبالتالي فإن A' هو الحدث اختيار طالب . إذن

$$P(A) = \frac{60}{100} = 0.6 \quad , \quad P(A') = 1 - 0.6 = 0.4$$

نفرض M هو الحدث أن الشخص الذي تم اختياره عشوائياً يدرس في قسم الرياضيات . إذن

$$P(M|\ A) = \frac{10}{100} = 0.1 \quad , \quad P(M|\ A') = \frac{25}{100} = 0.25$$

المطلوب هو حساب $P(A | M)$ وبتطبيق نظرية بييز

$$P(A | M) = \frac{P(A)P(M|\ A)}{P(A)P(M|\ A) + P(A')P(M|\ A')}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.1}{0.6 \times 0.1 + 0.4 \times 0.25} = \frac{3}{8}$$

مثـــال ٢١ :

يتنافس ثلاثـــة أشخاص على منصب مدير لإحدى الشركات ، وكانت احتمالات الفوز لهـــم 0.3 للأول و 0.5 للثاني و 0.2 للثالث . وإذا كان احتمال زيادة المبيعات للشركة إذا فـــاز الشخص الأول هو 0.6 وإذا فاز الشخص الثاني هو 0.4 وإذا فاز الشخص الثالث هو 0.5

١ – أوجد احتمال حدوث زيادة في مبيـــعات الشركة .

٢ – إذا حدث زيادة في مبيعات الشركة فما هو احتمال أن يكون الشخص الثالث قد فاز بمنصب المدير ؟

الحـــل :

نفرض أن A_1 هو الحدث فوز الشخص الأول بمنصب المدير

A_2 هو الحدث فوز الشخص الثاني بمنصب المدير

A_3 هو الحدث فوز الشخص الثالث بمنصب المدير

ونفرض أن الحدث B هو حدوث زيادة في مبيـــعات الشركة ، إذن

$$P(A_1)=\frac{3}{10} \quad , \quad P(A_2)=\frac{5}{10} \quad , \quad P(A_3)=\frac{2}{10}$$

$$P(B|A_1)=\frac{6}{10} \quad , \quad P(B|A_2)=\frac{4}{10} \quad , \quad P(B|A_3)=\frac{5}{10}$$

١ – احتمال حدوث زيادة في مبيعات الشركة هو $P(B)$ ونحصل عليـــه مـــن قـــانون الاحتمال الكلي كالآتي

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(B|A_i)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{3}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{10} = \frac{66}{100}$$

٢ – المطلوب هو $P(A_3|B)$ وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)\,P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P(B|A_i)} = \frac{\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}}{\frac{66}{100}} = \frac{10}{66}$$

مثـــال ٢٢ :

ثلاثة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة كما بالجدول الآتي :

الكرات	الصندوق I	الصندوق II	الصندوق III
حمراء R	3	2	5
بيضاء W	5	1	3
سوداء B	2	3	1
المحتـــوى	10	6	9

تم اختيار صندوق عشوائياً وسحبت منه كرة ، فإذا كانت الكرة المســـحوبة ســـوداء أوجـــد احتمال أن تكون الكرة المسحوبـــة من الصندوق II .

الحـــــل : المطلوب هو حساب $P(II \mid B)$ وفي هذا المثال يوجد لدينا تجربة عشـــــوائية ذات مرحلتين

المرحـــلة الأولى : هي اختيار صندوق عشوائياً من ثلاثة صناديق

والمرحـــلة الثانية : هي اختيار كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في التجربة الأولى وحيث أن الصناديق الثلاثة متشابهة فإن احتمال اختيار أياً منها متساوي ، أي أن

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$$

ومن محتويات الصناديق نجد أن

$$P(B \mid I) = \frac{2}{10} \quad , \quad P(B \mid II) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B \mid III) = \frac{1}{9}$$

وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(II \mid B) = \frac{P(II)\, P(B \mid II)}{P(I)\, P(B \mid I) + P(II)\, P(B \mid II) + P(III)\, P(B \mid III)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{6}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27}} = \frac{45}{73}$$

مثـــال ٢٣ :

صندوق يحتوى على 20 كرة منها 7 كرات حمراء والباقي كرات زرقـــاء ســحبت كرتــين عشوائياً على الترتيب واستبعدتا من الصندوق دون النظر إلى ألوانها وبعد ذلك سحبت كـــرة ثالثة عشوائياً من الصندوق ووجد أنها حمراء ، ما احتمال أن تكون الكرتان اللتان ســحبتا أولاً من اللون الأحمر ؟

الحـــل : في هذا المثال يوجد لدينا تجربة عشوائية ذات مرحلتين

المرحـــلة الأولى : هي سحب كرتين عشوائياً على الترتيب من الصندوق دون النظر إلى ألوانهـا وفي هذه الحالة قد تكون الكرتان من اللون الأحمر أو مختلفتا اللون أو من اللون الأزرق .

والمرحـــلة الثانية : هي سحب كرة ثالثة عشوائياً من الصندوق وبه 18 كرة .

نفرض A_1 هو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأحمر وأن A_2 هـــو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً مختلفتا اللون وهذا يعنى أن الكرة المســـحوبة أولاً تكون حمراء والثانية زرقاء أو أن الكرة المسحوبة أولاً زرقاء والثانية حمراء ونفرض A_3 هـــو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأزرق . وكذلك نفـــرض أن B هـــو الحدث أن الكرة الثالثة المسحوبة تكون حمراء ، والمطلوب هو حساب $P(A_1|B)$. إذن

$$P(A_1)=\frac{7}{20}\times\frac{6}{19}=\frac{21}{190} \quad , \quad P(B|\ A_1)=\frac{5}{18}$$

$$P(A_2)=\frac{7}{20}\times\frac{13}{19}+\frac{13}{20}\times\frac{7}{19}=\frac{91}{190} \quad , \quad P(B|\ A_2)=\frac{6}{18}$$

$$P(A_3)=\frac{13}{20}\times\frac{12}{19}=\frac{78}{190} \quad , \quad P(B|\ A_3)=\frac{7}{18}$$

وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{21}{190}\times\frac{5}{18}}{\frac{21}{190}\times\frac{5}{18}+\frac{91}{190}\times\frac{6}{18}+\frac{78}{190}\times\frac{7}{18}}=\frac{105}{1197}$$

٥ - شجرة الاحتمال Probability Tree

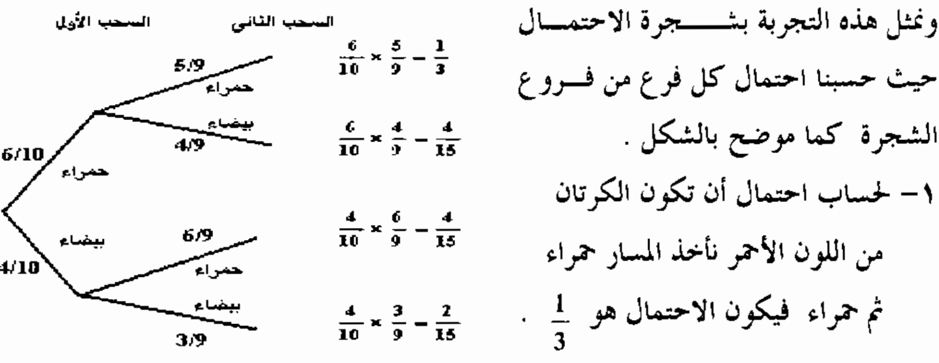
إذا كان لدينا مجموعة حوادث تمثل تجزيئا لفضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، وكان لدينا حدث يأتي من هذه المجموعة من الحوادث فإن شجرة الاحتمال تعتبر من الطرق المناسبة لحساب احتمال مثل هذا الحدث حيث يتم تمثيل فضاء العينة بأصل الشجرة ، ونمثل تجزي فضاء العينة بفروع الشجرة ، ونمثل تجزي كل فرع بفروع جديدة في الشجرة وهكذا . ويمكن الاستفادة من شجرة الاحتمال أيضا في تمثيل نتائج التجربة العشوائية المتعددة المراحل وتعيين احتمال كل فرع من فروع الشجرة التي تمثل هذه التجربة حيث يتم استخدام نظرية حاصل الضرب للاحتمال المشروط لحساب احتمال أي ناتج ممثل بمسار معطى في شجرة الاحتمال والأمثلة الآتية توضح لنا أسلوب الحل باستخدام شجرة الاحتمال .

مثال ٢٤ :

صندوق يحتوى على 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع .باستخدام شجرة الاحتمال أوجد احتمال

١ - أن تكون الكرتان من اللون الأحمر . ٢ - أن تكون الكرتان من نفس اللون .

الحل : نلاحظ أن التجربة ذات مرحلتين ، فعند سحب الكرة الأولى فإنها تكون إما حمراء أو بيضاء وهذا يمثل المرحلة الأولى ، ومع كل لون من هذه الألوان يرتبط لونان (الأحمر والأبيض) كنتيجة لسحب الكرة الثانية وهذا يمثل المرحلة الثانية .



ونمثل هذه التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فروع الشجرة كما موضح بالشكل .

١- لحساب احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأحمر نأخذ المسار حمراء ثم حمراء فيكون الاحتمال هو $\frac{1}{3}$.

٢- لحساب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون نأخذ المسار حمراء ثم حمراء والمسار بيضاء ثم بيضاء فيكون الاحتمال هو $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

مثـــال ٢٥ :

يحتوي صندوق A على 9 ورقات مرقمة من 1 إلى 9 ويحتوي صندوق B على 5 ورقـــات مرقمة من 1 إلى 5 ، اختير صندوق بطريقة عشـــوائية وسحبت منه ورقـــة ، باســـتخدام شجرة الاحتمال للتجربة أوجد

١ – احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم زوجي .

٢ – إذا كان رقم الورقة المسحوبة زوجياً فأوجد احتمال أن الورقة سحبت من الصندوق A .

الحـــل : التجربة ذات مرحلتين

المرحلة الأولى:اختيار صندوق إما A أو B وهذه يمثلها فرعين بالشجرة واحتمال أياً منهم $\frac{1}{2}$.

المرحلة الثانية:سحب ورقة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلـــة الأولى وهـــذه الورقة تكون إما زوجية E أو فردية D .

وتمثل هذه التجربة بشـــجرة الاحتمـــال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فـــروع الشجرة كما موضح بالشكل ، وبـــالنظر إلى شجرة الاحتمال والاحتمالات المرتبطة بكل فرع نســـتطيع إيجـــاد احتمـــالات الحوادث المختلفة للتجربة .

١ – لحساب احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم زوجي $P(E)$ نلاحظ في شجرة الاحتمال أنه يوجد مساران يؤديان إلى سحب رقم زوجي E ، إذن

$$P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{9}+\frac{1}{5}=\frac{19}{45}$$

٢ – لحساب احتمال أن تكون الورقة قد سحبت من الصندوق A إذا كان رقـــم الورقـــة المسحوبة زوجياً أي لحساب $P(A|E)$

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{2/9}{19/45}=\frac{10}{19}$$

مثـــال ٢٦:

ثلاثة صناديق تحوى كرات ملونة موزعة كما يلى :

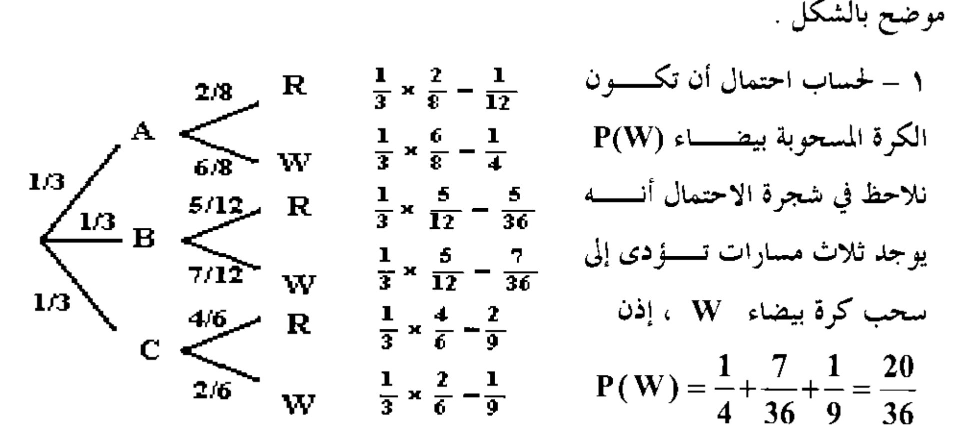
الكرات	الصندوق A	الصندوق B	الصندوق C
حمراء R	2	5	4
بيضاء W	6	7	2

اخترنا أحد الصناديق بصورة عشوائية وسحبنا منه كرة عشوائياً .ارسم شـــجرة الاحتمـــال واستنتج منها:

١ – احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

٢ – إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق B .

الحل : التجربة ذات مرحلتين المرحلة الأولى هي اختيار صندوق إما A أو B أو C وهـــذه يمثلها ثلاثة فروع بالشجرة واحتمال أياً منها $\frac{1}{3}$. والمرحلة الثانية هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلة الأولى وهذه الكرة تكون إما حمـــراء R أو بيضـــاء W ونمثل هذه التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فروع الشجرة كمـــا موضح بالشكل .



١ – لحساب احتمال أن تكـــون الكرة المسحوبة بيضـــاء $P(W)$ نلاحظ في شجرة الاحتمال أنــــه يوجد ثلاث مسارات تـــؤدى إلى سحب كرة بيضاء W ، إذن

$$P(W)=\frac{1}{4}+\frac{7}{36}+\frac{1}{9}=\frac{20}{36}$$

٢– لحساب احتمال أن تكون الكرة من الصندوق B إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء W

$$P\left(B\mid W\right)=\frac{P\left(B\cap W\right)}{P\left(W\right)}=\frac{7/36}{20/36}=\frac{7}{20}$$

مثـــال ٢٧ :

صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 3 كرات حمراء ، 2 كرة بيضاء ويحتـوى الصندوق الثاني على 2 كرة حمراء ، 5 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشـوائية ثم سحبت منه كرة عشوائياً ووضعت في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونها ثم سحبت كـرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتى :

١ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من نفس اللون .

٢– احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء .

٣– احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء بشرط أن الكرة فى السحب الأول كانت حمراء.

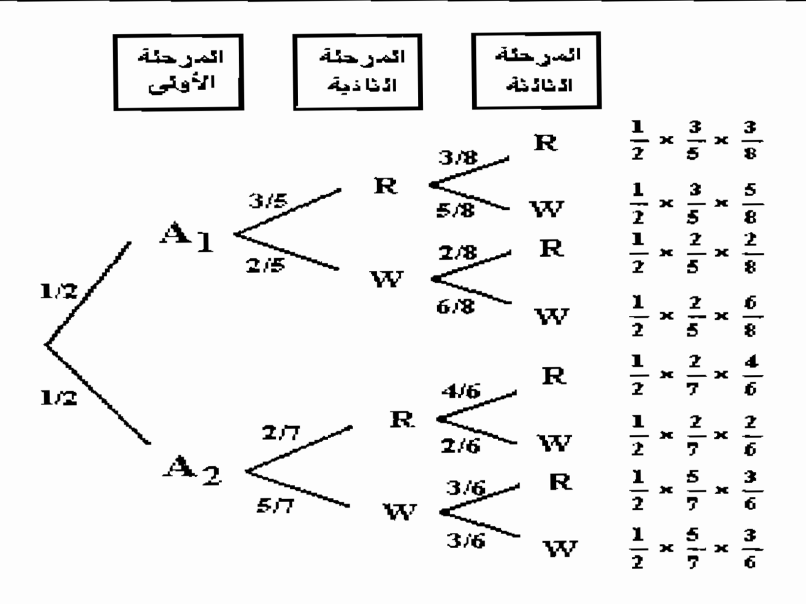
٤ – احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء بشرط أن الكرة فى السحب الأول كانت من الصندوق الأول .

الحـــل :

التجربة ذات ثلاثة مراحل ، الأولى هي اختيار أما الصندوق الأول A_1 أو الصندوق الثـاني A_2 وهذه يمثلها فرعان بالشجرة واحتمال أياً منها $\frac{1}{2}$ لأن الصندوقان متشابهان ، والمرحلـة الثانية هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلة الأولى وهذه الكـــرة تكون إما حمراء R أو بيضاء W ويمثل ذلك فرعان بالشجرة في كل اختيار من المرحلة الأولى ، والمرحلة الثالثة هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الآخر بعد أن نضيف أليه الكرة الـتي تم سحبها في المرحلة الثانية وفي هذه الحالة يزداد عدد الكرات في هذا الصندوق بمقـــدار كـــرة واحدة وقد تكون هذه الكرة إما حمراء R أو بيضاء W ويمثل ذلك فرعان بالشجرة في كـــل اختيار من المرحلة الثانية وبالتالي يمكن تمثيل التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمـــال كل فرع من فروع الشجرة كما موضح بالشكل .

١ – الحدث B أن تكون كلتا الكرتان من نفس اللون نحصل عليـــه مـــن المســـارات الأول والرابع والخامس والثامن . إذن

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{901}{1980}$$



٢- الحدث C أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء نحصل عليه من المسارات الثاني والرابع والسادس والثامن . إذن

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{947}{1680}$$

٣- الحدث D أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول حمراء نحصل عليه من المسارات الثاني والسادس . إذن

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{79}{336}$$

٤ - الحدث E أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول من الصندوق الأول نحصل عليه من المسارات الثاني والرابع . إذن

$$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{27}{80}$$

٦ - الأحداث المستقلة Independent Events

نفرض أن A , B حدثان من فضاء العينة S لتجربة عشوائية مـــا ، ونفـــرض أن $P(B) > 0 \quad , \quad P(A) > 0$. بوجه عام ، نعلم أن الاحتمال المشروط للحـــدث A إذا عُلم B لا يساوى احتمال وقوع الحدث A ولكن إذا حدث وكان $P(A|B) = P(A)$ في هذه الحالة نقول أن الحدث A مستقل عن الحدث B وهذا يعنى أن علمنا بوقوع الحـدث B لن يؤثر في فرصة وقوع الحدث A ، ومن تعريف الاحتمال المشروط

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

إذن

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(A) \quad & \Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ & \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \\ & \Rightarrow \quad \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \\ & \Rightarrow \quad P(B|A) = P(B) \end{aligned}$$

ومن هذا نستنتج أنه إذا كان الحدث A مستقل عن الحدث B فإن الحدث B يكون أيضـــا مستقل عن الحدث A ، وبمعنى آخر ، إذا كان علمنا بوقوع الحدث B لن يؤثر في فرصـــة وقوع الحدث A فإن علمنا بوقوع الحدث A لن يؤثر في فرصة وقوع الحدث B . ومن هـذا يمكننا القول أن علاقة الاستقلال هي علاقة تماثل على مجموعة كل الأحداث من فضاء العينـة ، وكنتيجة لخاصية التماثل التى تحققها علاقة الاستقلال فإنه بدلا من تقديم تعريـــف لاســـتقلال الحدث A عن الحدث B وتقديم تعريف لاستقلال الحدث B عن الحدث A فإننـــا نـــأخذ تعريف لاستقلال الحدثان A , B كما في التعريف الآتي :

تعريف ٢ : الحدثان المستقلان

يقال أن الحدثان A , B مستقلان Independent إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث $\{A , B\}$ هي مجموعة مستقلة من الأحداث وإذا كان الحدثان غير مستقلان فإنه يقال انهما يعتمدان على بعضهما Dependent .

ملاحظة :

في التعريف السابق لاستقلال حدثان A , B لم نشترط أن $P(A) > 0$ أو $P(B) > 0$ وبالتالي فإن

١ - أي حدث A بحيث $P(A)=0$ يكون مستقل عن كل حدث آخر B .

٢ - أي حدث A بحيث $P(A)=1$ يكون مستقل عن كل حدث آخر B .

مثـــال ٢٨ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرتين نفرض أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى ونفرض أن الحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية .

هل A , B أحداث مستقلة ؟

الحــل :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرتين فإننا نحصل على فضاء العينة المنتظم S

$$S = \{HH ,HT ,TH ,TT\}$$

حيث H تعنى ظهور وجه الصورة ، T تعنى ظهور وجه الكتابة .

وحيث أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى

والحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية ،

إذن

$$A = \{HH , HT\} \ , \ B = \{HH , TH\} \quad , \quad A \cap B = \{HH\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

وحيث أن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)\ P(B)$$

إذن A , B أحداث مستقلة .

مثـــال ٢٩:

صندوق يحتوى على 5 كرات حمراء ، 7 كرات بيضاء . تم سحب كرتان مـــن الصنـــدوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى .نفرض أن الحدث A هو أن تكون الكرة الأولى حمـــراء ونفرض أن الحدث B هو أن تكون الكرة الثانية حمراء .

١ – إذا كان السحب مع الإرجاع هل الحدثان A , B مستقلان ؟

٢ – إذا كان السحب بدون إرجاع فهل الحدثان A , B مستقلان ؟

الحـــل :

١ – السحب مع الإرجاع

في هذه الحالة $P(B)=\frac{5}{12}$, $P(A)=\frac{5}{12}$ وباستخدام القاعدة الأساسية للعد فإن

$$P(A\cap B)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$$

وحيث أن $P(A\cap B)=\frac{25}{144}=P(A)\,P(B)$ إذن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – السحب بدون إرجاع

لحساب احتمال B نستخدم قانون الاحتمال الكلي

$$P(B)=P(A)\,P(B|A)+P(A')\,P(B|A')$$

وحيث أن

$$P(A)=\frac{5}{12}\quad,\quad P(A')=1-P(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}\quad,$$

$$P(B|A)=\frac{4}{11}\quad,\quad P(B|A')=\frac{5}{11}$$

إذن

$$P(B)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{12}$$

ومن ذلك ينتج أن $P(B|A)\neq P(B)$

إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

مثـــال ٣٠:

في تجربة اختيار عددا عشوائياً من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ نفـــرض أن الحدث A هو اختيار عدد يقبل القسمة على 2 والحدث B هو اختيار عدد يقبل القســمة على 3 و الحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 . هل الحدثان

١ – A , B مستقلان ؟ ٢ – A , C مستقلان ؟ ٣ – B , C مستقلان ؟

الحـــل : الأحداث A , B , C هي

$$A = \{ 2n : 1 \le n \le 50 \} ,$$
$$B = \{ 3n : 1 \le n \le 33 \} ,$$
$$C = \{ 5n : 1 \le n \le 20 \}$$

إذن

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{33}{100} \quad , \quad P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

١ – هل الحدثان A , B مستقلان ؟

الحدث $A \cap B$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 3 , 2 أي يقبل القسمة على 6 إذن

$$A \cap B = \{ 6n : 1 \le n \le 16 \} \ , P(A \cap B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

وحيث أن $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$ ، إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

٢ – هل الحدثان A , C مستقلان ؟

الحدث $A \cap C$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 5 , 2 أي على 10 إذن

$$A \cap C = \{ 10n : 1 \le n \le 10 \} \ , P(A \cap C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

وحيث أن $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ ، إذن الحدثان A , C مستقلان .

٣ – هل الحدثان B , C مستقلان ؟

الحدث $B \cap C$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 5 , 3 أي على 15 إذن

$$B \cap C = \{ 15n : 1 \le n \le 6 \}, \ P(B \cap C) = \frac{6}{100}$$

وحيث أن $P(B \cap C) \neq P(B)\,P(C)$ ، إذن الحدثان B , C غير مستقلان .

مثـــال ٣١ :

إذا كان الحدث A يعني أن للعائلة أطفال من النوعين (ذكور وإناث) والحدث B يعني أن للعائلة ولد واحد على الأكثر ، أثبت أن

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال فإن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان فإن الحدثان A , B غير مستقلان .

الحـــل :

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

إذن

$$A = \{ bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb \}$$

$$B = \{ bgg , gbg , ggb , ggg \}$$

$$A \cap B = \{ bgg , gbg , ggb \}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

وحيث أن $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ إذن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bb , bg , gb , gg \}$$

إذن

$$A = \{ bg , gb \}$$

$$B = \{ bg , gb , gg \}$$

$$A \cap B = \{ bg , gb \}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وحيث أن $P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$ إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

مثـــال ٣٢ :

يوجد في مدينة مـــا وحدتين لإطفاء الحرائق مستقلتين عن بعضهما البعض ، فإذا كان احتمـــال وصول الأولى إلى مكان حريق ما في الوقت المناسب هو **0.95** واحتمـــال وصول الثانية لنفس المكان هو **0.90** فما احتمال وصول إحدى الوحدتين على الأقل إلى مكان الحريـــق المذكور ؟

الحـــل :

نفرض أن الحدث **A** هو وصول وحدة الإطفاء الأولى إلى مكان الحريق

وأن الحدث **B** هو وصول وحدة الإطفاء الثانية إلى مكان الحريق

إذن

$$P(A) = 0.95 \quad , \quad P(B) = 0.9$$

وحيث أن وحدتي الإطفاء مستقلتين عن بعضهما البعض ، إذن **A , B** حدثان مســــتقلان ، ومن تعريف الأحداث المستقلة

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = (0.95) \times (0.9) = 0.855$$

احتمال وصول إحدى الوحدتين على الأقل إلى مكان الحريـــق المذكور هو $P(A \cup B)$

وحيث أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذن

$$P(A \cup B) = 0.95 + 0.9 - 0.855 = 0.995$$

نظريـــة ٦: إذا كان الحدثان **A , B** مستقلان فإن الحدثان **A , B′** يكونان مســـتقلان .

البرهـــان :

حيث أن **A , B** حدثان مستقلان فإن $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

وسوف نحاول إثبات أن **A , B′** حدثان مســـتقلان ، أي نحاول إثبات أن

$$P(A \cap B') = P(A)\ P(B')$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)\,P(B) \\ &= P(A)\,(1 - P(B)) \\ &= P(A)\,P(B') \end{aligned}$$

ملاحظة : إذا كان الحدثان A , B مستقلان فإن الحدثان A' , B' يكونان مســـتقلان .
ويمكن التحقق من ذلك باستخدام التعريف ومن قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)] \\ &= [1 - P(A)]\,[1 - P(B)] \\ &= P(A')P(B') \end{aligned}$$

كما يمكن التحقق من ذلك أيضا عن طريق تطبيق النظرية السابقة علـــى الحدثــان A , B فنحصل على أن A , B' حدثان مســـتقلان ثم تطبيق النظرية مرة ثانية علـــى الحدثـــان B' , A فنحصل على أن A' , B' حدثان مســـتقلان . ومن هذا نستنتج أنه إذا كـــان الحدثان A , B مستقلان فإن علمنا بوقوع الحدث A أو علمنا بعدم وقوع الحدث A لن يؤثر في فرصة وقوع أو عدم وقوع الحدث B والعكس صحيح .

نظرية ٧ :

إذا كان الحدثان A , B أحداث متنافية وكان $P(A) > 0 \;,\; P(B) > 0$ فإن الحدثان A , B يكونان غير مستقلان أي الهما يعتمدان على بعضهما .

البرهان:

نفرض أن A , B أحداث متنافية ، أي أن $A \cap B = \Phi$ ونفرض أن $P(A)>0 \;,\; P(B)>0$ باستخدام أسلوب البرهان بالتناقض نفرض أن عكس المطلوب هو الصواب ، أي نفـــرض أن الحدثان A , B مستقلان . إذن من تعريف الأحداث المستقلة فإن $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ وحيث أن $A \cap B = \Phi \;\Rightarrow\; P(A \cap B) = 0$ إذن $P(A)\,P(B) = 0$ وهذا يعـــنى أنه إما $P(A) = 0$ أو $P(B) = 0$ وهذا يناقض الفرض $P(A) > 0 \;,\; P(B) > 0$
إذن الفرض أن الحدثان A , B مستقلان هو فرض خاطئ ، وبالتالي فإن الصـــواب هـــو أن الحدثان A , B يكونان غير مستقلان .ومن جهة أخرى نحن نعلـــم انـــه إذا كـــان A , B أحداث متنافية فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الحدث الآخر ، أي أنه إذا وقع أحدهمـــا فـــإن احتمال وقوع الحدث الآخر يساوى صفر .

والآن باتباع نفس الأسلوب السابق عند تعريف استقلال حدثان فانه يمكن مد تعريف الاستقلال إلى ثلاثة أحداث A , B , C حيث نقول انهم أحداث مستقلة إذا كان علمنا بوقوع أحدهما أو إذا كان علمنا بالوقوع المشترك لأي زوج من هذه الأحداث لن يؤثر في فرصة وقوع الأحداث المتبقية . أي أن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة إذا كان المجموعات $\{A,B\} , \{A,C\} , \{B,C\} , \{A,B\cap C\} , \{B,A\cap C\} , \{C,A\cap B\}$ جميعها مجموعات مستقلة من الأحداث . إذن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة إذا كان

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$P(A\cap C) = P(A)\,P(C)$$

$$P(B\cap C) = P(B)\,P(C)$$

$$P(A\cap (B\cap C)) = P(A)\,P(B\cap C)$$

$$P(B\cap (A\cap C)) = P(B)\,P(A\cap C)$$

$$P(C\cap (A\cap B)) = P(C)\,P(A\cap B)$$

ونلاحظ أن هذه العلاقات يمكن إنقاصها حيث أن العلاقات الثلاثة الأولى بالإضافة إلى العلاقة $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ تؤدى إلى العلاقات الثلاثة الأخيرة . إذن تعريف استقلال ثلاثة أحداث يمكن صياغته في الصورة المختصرة الآتية :

تعريف ٣: استقلال ثلاثة أحداث

الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة **Independent** إذا كان

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$P(A\cap C) = P(A)\,P(C)$$

$$P(B\cap C) = P(B)\,P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث $\{A,B,C\}$ هي مجموعة مستقلة من الأحداث .

والمثال الآتي يوضح لنا أن الشرط $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ وبوجه عام ، غير كافي لاستقلال مجموعة الأحداث $\{A,B,C\}$.

مثال ٣٣:

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين ، نفرض الحدث A هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 5 , 2 , 1 ونفرض الحدث B هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقـام 6 , 5 , 4 ونفرض الحدث C هو أن مجموع ما يظهر في الرميتين يساوى 9 .

عدد عناصر فضاء العينة S في هذه التجربة يساوى 36 ، والأحداث كالآتي :

$$A = \{ (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5) \}$$

$$B = \{ (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6) \}$$

$$C = \{ (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) \}$$

$$A \cap B = \{ (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5) \}$$

$$A \cap C = \{ (4,5) \}$$

$$B \cap C = \{ (3,6), (4,5), (5,4) \}$$

$$A \cap B \cap C = \{ (4,5) \}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(A \cap C) = \frac{1}{36} \quad , \quad P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$$

نلاحظ أن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)\,P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{4} = P(A)\,P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{4} = P(B)\,P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

وهذا المثال يوضح لنا أن الشرط $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ متحقـــق وبالرغم من ذلك فإن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ غير مستقلة .

تعريف ٤ : الأحداث المستقلة مثنى مثنى Pair-wise Independent

إذا كان A , B , C ثلاثة أحداث وكان علمنا بوقوع أياً منها لا يؤثر في فرصة وقوع الحدثان الآخران فإننا نقول أن الأحداث الثلاثة مستقلة مثنى مثنى ، وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ هي مجموعة مستقلة مثنى مثنى .

إذن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ تكون مجموعة مستقلة مثنى مثنى إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$$

وفى حالة أن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى نلاحظ انه تم إغفال دراسة أن الوقوع المشترك لأي حدثين قد يؤثر في فرصة وقوع الحدث الثالث المتبقي وهذا هو الفرق بين الاستقلال مثنى مثنى **Pair-wise Independent** واستقلال الأحداث **Independent** والمثال الآتي يوضح الفرق بين النوعين من استقلال الأحداث .

مثال ٣٤ :

يصل شخص إلى مكتبه كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثامنة 8:00 والساعة التاسعة 9:00 صباحا . نفرض أن الحدث A هو أن يصل هذا الشخص إلى مكتبه غدا ما بين الساعة 8:15 والساعة 8:45 صباحا ونفرض أن الحدث B هو أن يصل الشخص إلى مكتبه غدا ما بين الساعة 8:30 والساعة 9:00 صباحا ونفرض أن الحدث C هو أن يصل الشخص إلى مكتبه غدا إما بين الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 صباحا . هل مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى أم مستقلة ؟

الحل :

في هذه التجربة فإن فضاء العينة S يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:00 والساعة 9:00 أي انه فترة زمنية مقدارها 60 دقيقة والحدث A يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:15 والساعة 8:45 أي انه فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة والحدث B يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:30 والساعة 9:00 أي انه فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة والحدث C يمثله فترة زمنية إما بين

الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 أي انه فـــترة زمنيـــة مقدارها 30 دقيقة . إذن

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

الحدث $A \cap B$ يمثله الفترة الزمنية المشتركة بين A , B ومقدارها 15 دقيقـــة وبـــالمثل الحدث $A \cap C$ والحدث $B \cap C$ كل منهم يمثل فترة زمنية مقدارها 15 دقيقــــة بينمـــا الحدث $A \cap B \cap C$ لا يمثل أي فترة زمنية مشتركة ، أي أن

$$A \cap B \cap C = \Phi$$

إذن

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \quad ,$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

وحيث أن الحدثان $B \cap C$ ، A لا يوجد فترة زمنية مشتركة بينـــهما ، إذن همـــا حدثـــان متنافيان وحيث أن احتمال كل منهم اكبر من الصفر لذلك فهما حدثـــان غـــير مســـتقلان ، وبالتالي فإن مجموعة الأحداث $\{ A , B , C \}$ غير مستقلة وهذا يتحقق أيضا من الشرط

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\, P(B)\, P(C)$$

ونلاحظ أن

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

أي أن الحدثان A , B مستقلان ،

وبالمثل A , C مستقلان وأيضا B , C مستقلان ،

إذن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى .

والآن يمكن تعريف استقلال أكثر من ثلاث أحداث بنفس الأسلوب الذي اتبعناه مـــن قبل ، فنقول أن مجموعة الأحداث $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ مستقلة إذا كان علمنا بوقوع أحدهما أو إذا كان علمنا بالوقوع المشترك لأي عدد من هذه الأحداث لن يؤثر في فرصـــة وقوع الأحداث المتبقية . ويمكن صياغة التعريف في الصورة المختصرة الآتية :

تعريف ٥ :

مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ تسمى أحداث مستقلة إذا كان لكل مجموعة جزئية منها بالصورة $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$, $i_k \le n$, $k \ge 2$ فإن

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

وفى الحقيقة فإن هذا التعريف لا يقتصر على عدد منتهى من الأحداث ولكن يمكـــن توســـيعه ليشمل عدد لا نهائي من الأحداث ، فمتتابعة الأحداث $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ تسمى أحداث مســـتقلة إذا كان لكل مجموعة جزئية منتهية من المتتابعة بالصورة $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$, $k \ge 2$ فإن

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

ومن التعريف نجد أن مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ تكون مستقلة إذا كـــان لكل التركيبات الممكنة $1 \le i < j < k < \dots \le n$ فإن العلاقات الآتية تكون متحققة :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k)$$
$$\vdots$$
$$P(A_i \cap A_j \cap \dots A_n) = P(A_i)\, P(A_j) \dots P(A_n)$$

نلاحظ أن العلاقة الأولى تصف $\binom{n}{2}$ من المعادلات ، والعلاقة الثانية تصف $\binom{n}{3}$ مـــن المعادلات ، ... ، والعلاقة الأخيرة تصف $\binom{n}{n}$ من المعادلات . إذن مجموعة الأحـــداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ تكون مستقلة إذا تحقق جميع المعادلات التى تصفها العلاقات الســـابقة وعدد هذه المعادلات يساوى $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$ ومن نظرية ذات الحدين فإن

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$$

أي أن عدد المعادلات التي يجب تحقيقها لإثبات أن مجموعة الأحـــداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ مستقلة هو $2^n - n - 1$.

مثـــال ٣٥ :

ثلاثة طلاب يقوم كل منهم على حده بدراسة مشكلة معينة بغرض الوصول إلى حل لها ، وكان احتمال أن يصل الطالب الأول إلى حل هـــو $\frac{2}{3}$ ، واحتمال أن يصل الطالب الثاني إلى حـــل هو $\frac{3}{4}$ ، واحتمال أن يصل الطالب الثالث إلى حل هو $\frac{4}{5}$. أوجد مـــا يأتي :

١ – احتمال عدم التوصل إلى حـــل .

٢ – احتمال التـــوصـــل إلى حـــل .

٣ – احتمال توصل جميع الطلاب إلى حـــل .

٤ – احتمال توصل طالب واحد فقط إلى حـــل .

٥ – احتمال توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل .

الحـــــل :

نفرض الحدث A هو أن يصل الطالب الأول إلى حل ونفرض الحدث B هـــو أن يصـــل الطالب الثاني إلى حل ونفرض الحدث C هو أن يصل الطالب الثالث إلى حل .إذن

$$P(A)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(B)=\frac{3}{4} \quad , \quad P(C)=\frac{4}{5}$$

وحيث أن الطلاب الثلاثة يقوم كل منهم على حده بدراسة المشكلة ، إذن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون أحداث مستقلة .

١ – احتمال عدم التوصل إلى حـــل .

عدم التوصل إلى حل هو الحدث $(A\cup B\cup C)'$ وباستخدام قانون ديمورجان

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)' &= P(A'\cap B'\cap C') \\ &= P(A')P(B')P(C') \\ &= [1-P(A)]\times[1-P(B)]\times[1-P(C)] \\ &= \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\tfrac{3}{4}\right)\times\left(1-\tfrac{4}{5}\right)=\tfrac{1}{60}\end{aligned}$$

٢ – احتمال التـــوصـــل إلى حـــل .

التوصل إلى حل هو الحدث $A\cup B\cup C$. إذن

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A\cup B\cup C)' =1-\frac{1}{60}=\frac{59}{60}$$

٣ – احتمال توصل جميع الطلاب إلى حـــل .

توصل جميع الطلاب إلى حـــل هو الحدث $A\cap B\cap C$ ، وحيث أن A , B , C أحداث مستقلة ، إذن

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

٤ – احتمال توصل طالب واحد فقط إلى حـــل .

توصل طالب واحد فقط إلى حـــل هو الحدث E حيث

$$E = (A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$$

إذن

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A\cap B'\cap C') + P(A'\cap B\cap C') + P(A'\cap B'\cap C) \\
&= P(A)\ P(B')\ P(C') + P(A')\ P(B)\ P(C') + P(A')\ P(B')\ P(C) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} \\
&= \frac{9}{60} = \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

٥ – احتمال توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل .

توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل هو الحدث F حيث

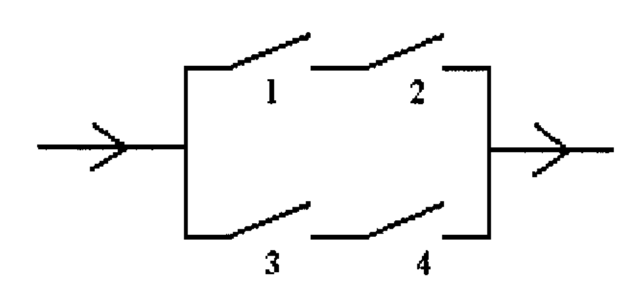
$$F = (A\cap B\cap C')\cup(A\cap B'\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)$$

إذن

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(A\cap B\cap C') + P(A\cap B'\cap C) + P(A'\cap B\cap C) \\
&= P(A)\ P(B)\ P(C') + P(A)\ P(B')\ P(C) + P(A')\ P(B)\ P(C) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} \\
&= \frac{26}{60} = \frac{13}{30}
\end{aligned}$$

مثـــال ٣٦ :

الشـــكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات أربعة مفاتيح مستقلة عن بعضها البعض سواء في الغلق أو الفتح واحتـــمال الغلق هو p واحتـــمال الفتح هو $p-1$.



أوجد احتمال مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

الحـــل :

نفرض أن A_i هو الحدث أن المفتاح في الموضع i يكون مغلق حيث $1 \le i \le 4$
ومن المعلوم أن التيار الكهربائي يمر في الدائرة إذا كان المفتاح رقم 1 والمفتاح رقم 2 في وضع الأقفال ON أو إذا كان المفتاح رقم 3 والمفتاح رقم 4 في وضع الأقفـــال ON ، أي إذا وقع على الأقل الحدث $A_1 \cap A_2$ أو الحدث $A_3 \cap A_4$ وبالتالي فإن التيار الكـــهربائي يمر في الدائرة إذا وقع الحدث

$$\left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right)$$

وحيث أن الأحداث الأربعة مستقلة ، إذن الاحتمال المطلوب نحصل عليه كالآتي :

$$P\left(\left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_3 \cap A_4\right)\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right) + P\left(A_3 \cap A_4\right) - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$$

$$= P(A_1)\, P(A_2) + P(A_3) P(A_4) - P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) P(A_4)$$

$$= p^2 + p^2 - p^4$$
$$= p^2\left(2 - p^2\right)$$

٧ - التجارب المستقلة Independent Experiments

ناقشنا فيما سبق فضاء الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية كُررت عدداً محدوداً من المرات مثل تجربة رمى قطعة نقود معدنية عدد محدود من المرات أو مثل تجربة رمى حجر نرد عدد محدود من المرات . ويمكن صياغة مفهوم التجارب المتكررة رياضيا كما يلي :

تعريف ٦ :

نفرض S فضاء احتمال منتهى ، حاصل الضرب الكارتيزي n من المرات لفضاء الاحتمال S يكوّن فضاء الاحتمال T لعدد n من التجارب أو المحاولات المتكررة ويعرف بالصورة

$$T = S \times S \times \ \dots \times S = \{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \ : \ s_i \in S \}$$

واحتمال أي حدث أولى $\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \} \subset T$ يكون

$$P(\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \}) = P(\{s_1\}) \times P(\{s_2\}) \times \ \dots \ \times P(\{s_n\})$$

ونلاحظ من التعريف أن فضاء العينة T يمثل عدد n من المحاولات المستقلة ويتكون من عناصر S المرتبة التي على الصورة $(s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n)$ واحتمال أي حدث أولي من فضاء العينة T يكون ذو شكل خاص هو حاصل ضرب لاحتمالات الأحداث الأولية من S وهذا الشكل الخاص يمنحنا طريقة سهلة لحساب الاحتمالات ، وعند التعامل مع التجارب المستقلة سوف نهمل الأقواس { } فمثلا الحدث $\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \}$ سوف يكتب بالصورة $(s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n)$ أو في الصورة $s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n$ للاختصار ، وحيث أن المحاولات المستقلة هي في مجموعها تجربة عشوائية فإنه يمكن رسم الشجرة البيانية للتجربة وسوف نلاحظ أن الشجرة البيانية في هذه الحالة تحقق الخواص الآتية :

١- كل فرع يؤدى إلى نفس الناتج يكون له نفس الاحتمال .

٢ - كل نقطة تفرع يكون لها نفس النواتج .

مثـــال ٣٧ :

في سباق للخيل بين ثلاثة من الجياد a , b , c كان احتمالات الفوز $\frac{1}{6} , \frac{1}{3} , \frac{1}{2}$ علـــى الترتيب ، فإذا تسابقت الجياد الثلاثة مرتين معاً فأوجد

١ – احتمال أن الجواد a يفوز بالسـباق في المرتين .

٢ – احتمال أن نفس الجواد يفوز بالسـباق في المرتين .

٣ – احتمال أن يفوز الجواد a بالسـباق الأول ويفوز الجواد c في السـباق الثاني .

٤ – احتمال أن يفوز الجواد b في السـباق الثاني .

٥ – احتمال عدم تكرار الفوز في المرتين لأياً من الجياد الثلاثة .

الحـــل :

عندما تتسابق الجياد الثلاثة فإن فضاء العينة S يكون $S = \{ a , b , c \}$ حيث

$$P(a) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(b) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(c) = \frac{1}{6}$$

وعندما تتسابق الجياد الثلاثة مرتين فإن فضاء العينة T يكون

$$\begin{aligned} T &= S \times S \\ &= \{ a , b , c \} \times \{ a , b , c \} \\ &= \{ aa , ab , ac , ba , bb , bc , ca , cb , cc \} \end{aligned}$$

١ – الحدث أن الجواد a يفوز بالسـباق في المرتين هو aa

$$P(aa) = P(a) \times P(a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

٢ – الحدث أن نفس الجواد يفوز بالسـباق في المرتين هو $A = \{ aa , bb , cc \}$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(aa) + P(bb) + P(cc) \\ &= P(a) \times P(a) + P(b) \times P(b) + P(c) \times P(c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

٣ – الحدث أن يفوز الجواد a بالسـباق الأول ويفوز الجواد c في السـباق الثاني هو ac

$$P(ac) = P(a) \times P(c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

٤ - الحدث أن يفوز الجواد b في السباق الثاني هو $B = \{ ab , bb , cb \}$.

$$P(B) = P(ab) + P(bb) + P(cb)$$

$$= P(a) \times P(b) + P(b) \times P(b) + P(c) \times P(b)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

٥ - الحدث عدم تكرار الفوز في المرتين لأياً من الجياد الثلاثة هو

$$C = \{ ab , ac , ba , bc , ca , cb \}$$

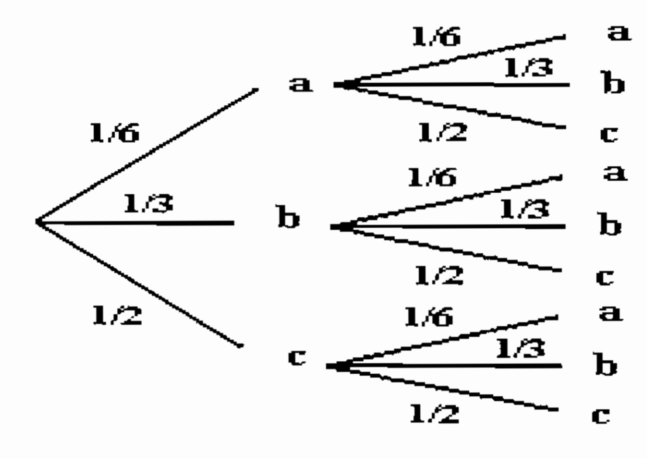
وهو نفسه مكملة الحدث فوز نفس الجواد في المرتين ، أي انه مكملة الحدث

$$A = \{ aa , bb , cc \}$$

إذن

$$P(C) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

وبرسم الشجرة البيانية للمحاولات المستقلة في هذا المثال نلاحظ أن أي نقطة تفرع لها نفس النواتج a , b , c وأن أي فرع يؤدى إلى الناتج a له الاحتمال P (a) وأي فرع يؤدى إلى الناتج b له الاحتمال P (b) وأي فرع يؤدى إلى الناتج c له الاحتمال P (c) كما هو موضح بالرسم



مثـــال ٣٨ :

فريق لكرة القدم في أي مباراة يلعبها يكون احتمال فـــوزه 0.6 واحتمـــال تعادلـــه 0.3 واحتمال خسارته 0.1 فإذا لعب هذا الفريق ثلاث مباريات فأوجد ما يأتي :

١– احتمال فوز الفريق في المباريات الثلاثة .

٢– احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل .

٣– إذا كان الفريق يحصل على ثلاث نقاط في حالة الفوز ونقطة واحدة في حالة التعـــادل ولا يحصل على أي نقطة في حالة الخسارة فأوجد احتمال أن الفريق يحصل على 7 نقاط علـــى الأقل في مجموع المباريات الثلاث .

الحـــل : نفرض أن a يرمز إلى فوز الفريق ، b يرمز إلى تعـــادل الفريـــق ، c يرمـــز إلى خسارة الفريق في أي مبـــاراة يلعبـــها. إذن فضـــاء العينـــة $S = \{ a , b , c \}$ ويكـــون $P(a)=0.6 \ , P(b) = 0.3 \ , P(c) = 0.1$ وإذا لعب الفريق ثلاث مباريات فإن فضاء العينة يكون

$$T = S\times S \times S = \{ a , b , c \} \times \{ a , b , c \} \times \{ a , b , c \}$$

١– نفرض الحدث A هو فوز الفريق في المباريات الثلاثة ، إذن

$$A = \{ aaa \} \quad , \quad P(A) = P(aaa) = (0.6)\times(0.6)\times(0.6) = 0.216$$

٢– نفرض الحدث B هو فوز الفريق في مباريتين على الأقل ، إذن

$$B = \{ aaa , aab , aba , baa , aac , aca , caa \}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(aaa) + P(aab) + P(aba) + P(baa) \\ &\quad + P(aac) + P(aca) + P(caa) \\ &= (0.6)^3 + (0.6)^2 \times (0.3) + (0.6)^2 \times (0.3) + (0.6)^2 \times (0.3) \\ &\quad + (0.6)^2 \times (0.1) + (0.6)^2 \times (0.1) + (0.6)^2 \times (0.1) \\ &= 0.216 + 3\times(0.108) + 3\times(0.036) = 0.648 \end{aligned}$$

٣– نفرض الحدث C أن الفريق يحصل على 7 نقاط على الأقل في مجموع المباريات الثـلاث ، إذن الحدث C هو فوز الفريق في مباريتين على الأقل ودون هزيمة

$$C = \{ aaa , aab , aba , baa \}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(aaa) + P(aab) + P(aba) + P(baa) \\ &= (0.6)^3 + (0.6)^2 \times (0.3) + (0.6)^2 \times (0.3) + (0.6)^2 \times (0.3) \\ &= 0.216 + 3\times(0.108) = 0.54 \end{aligned}$$

مثـــال ٣٩ :

امتحان في مقرر اللغة الإنجليزية به 10 أسئلة ، الستة أسئلة الأولى بنظام الصواب والخطـــأ **true - false** والأسئلة الباقية بنظام الاختيار من متعدد **multiple choice** حيث لكـــل سؤال أربع إجابات منها إجابة واحدة فقط صواب . أحد الطلاب لم يكن مســتعد للاختبـــار وأجاب على جميع الأسئلة بالتخمين . أوجد

١- احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة .

٢- إذا كان النجاح في الاختبار يتطلب أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقـــل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل مـــن الأســئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد فأوجد احتمال رسوب هذا الطالب .

الحـــل :

عندما يجيب الطالب على أي سؤال من الأسئلة العشرة في الاختبار فانه أما أن تكون الإجابـــة صواب t أو تكون خطأ f وبالتالي فإن فضاء العينة يكون $S = \{ t , f \}$ وعندما يجيـــب الطالب على الأسئلة العشرة فإن فضاء العينة يصبح

$$T = \{ (s_1 , s_2 , \ \ldots \ , s_{10}) : \ s_i \in S \ \ , \ \ 1 \le i \le 10 \ \}$$

حيث في الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ فإن

$$P(s_i) = \frac{1}{2} \quad , \quad 1 \le i \le 6$$

و في الأسئلة الأربعة الباقية $7 \le i \le 10$ بنظام الاختيار من متعدد فإن

$$P(s_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & , \quad s_i = t \\ \\ \dfrac{3}{4} & , \quad s_i = f \end{cases}$$

١- نفرض الحدث A أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة ، إذن

$$P(A) = \prod_{i=1}^{10} P(s_i) = \left(\prod_{i=1}^{6} P(s_i) \right) \times \left(\prod_{i=7}^{10} P(s_i) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \times \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{1}{2^{14}} = 0.00006$$

٢- نفرض الحدث B أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل من الأسئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد ، إذن الحدث B هو اتحاد الأربعة أحداث المتنافية الآتية :

الحدث B_1 هو الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى وعلى 3 من الأربعة الباقية

الحدث B_2 هو الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى وعلى 4 من الأربعة الباقية

الحدث B_3 هو الإجابة صواب على 6 أسئلة من الستة الأولى وعلى 3 من الأربعة الباقية

الحدث B_4 هو الإجابة صواب على 6 أسئلة من الستة الأولى وعلى 4 من الأربعة الباقية

وحيث أن الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى يتم بطرق عددها $\binom{6}{5}$ واحتمال كل منها $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ والإجابة صواب على 3 أسئلة من الأربعة الباقية يتم بطرق عددها $\binom{4}{3}$ واحتمال كل منها $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)$ ، إذن

$$P(B_1) = \binom{6}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0.0044$$

وبالمثل

$$P(B_2) = \binom{6}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0004$$

$$P(B_3) = \binom{6}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0.0007$$

$$P(B_4) = \binom{6}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0001$$

وحيث أن B هو اتحاد أحداث متنافية $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ ، إذن

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) \\ &= 0.0044 + 0.0004 + 0.0007 + 0.0001 = 0.0056 \end{aligned}$$

والحدث رسوب الطالب يكون B' وبالتالي فإن احتمال رسوب هذا الطالب يكون

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.0056 = 0.9944$.

الفصل 4

تمارين

١ – أخذت عينة تتكون من 100 طالب من طلاب قسم الرياضيات بكلية التربية ووجد أن نسبة النجاح 87% في امتحان مقرر الاحتمالات ، 90% في امتحان مقرر التفاضل والتكامل ، 82% في المقررين معاً . تم اختيار طالب عشوائياً من هذه العينة ووجد انـه ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات . ما احتمال أن هذا الطالب الذي اخترناه عشـــوائياً يكون ناجح في مقرر التفاضل والتكامل ؟

٢ – في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة .

١ – إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أقل من 5 ، فما احتمال أن يكون عدد زوجي ؟

٢ – إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أكبر من 4 ، فما احتمال أن يكون عدد فردى ؟

٣ – أوجد احتمال أن يظهر عدد فردى بشرط أن يكون اكبر من 2 .

٣ – في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين ، إذا كان مجموع الوجهين الظاهرين اكبر من 6 فما هو احتمال أن يكون أحد حجري النرد يظهر عليه الرقم 3 ؟

٤ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = 0.35 \quad , \quad P(B) = 0.45 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.25$$

أوجد $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A'|B')$, $P(B'|A')$.

٥ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = \frac{5}{8} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

أوجد $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|B')$, $P(B|A')$.

٦ - أوجد $P(B|A)$, $P(A|B)$ في الحالات الآتية :

١- إذا كان $A \subseteq B$.

٢- إذا كان $B \subseteq A$.

٣- إذا كان A , B أحداث متنافية .

٤- إذا كان $A \cap B = \Phi$.

٧ - أثبت أنه لأي حدثان A , B من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما فإن

١ - $P(A|B) > P(A)$ إذا وفقط إذا كان $P(B|A) > P(B)$.

٢ - $P(A|B) \geq \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$ حيث $P(B) = \beta$, $P(A) = \alpha$.

٨ - إذا كان $P(E|F') \geq P(G|F')$ ، $P(E|F) \geq P(G|F)$

فأثبت أن $P(E) \geq P(G)$

٩- في مدينة ما ومن مجموعة العائلات التي لديها طفلان تم اختيار عائلة عشوائياً ووجد أن هذه العائلة لديها ولد ، وبفرض أن احتمال وجود ولد متساوي مع احتمال وجود بنت فأوجد احتمال أن الطفل الآخر في هذه العائلة يكون ولد .

١٠- من مجموعة العائلات في مدينة ما والتي لديها 3 أطفال تم اختيار عائلة بطريقة عشوائية ووجد أن هذه العائلة لديها بنت ، وبفرض أن احتمال وجود ولد متساوي مع احتمال وجود بنت فأوجد احتمال أن يكون هذه العائلة ليس لديها أطفال ذكور .

١١- في مدينة ما كان احتمال أن يعيش أي شخص لمدة 70 عام على الأقل يساوى 0.65 واحتمال أن يعيش لمدة 85 عام على الأقل يساوى 0.35 ، تم اختيار شخص عشوائياً من هذه المدينة ووجد أن عمره 70 عام فما هو احتمال أن يبقى هذا الشخص على قيد الحياة حتى يصل به العمر إلى 85 عام .

١٢- صندوق يحتوى على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 . سحبت كرتان على الترتيب وبفرض الحدث A هو أن مجموع الرقمان يساوى 5 والحدث B_i هو أن الكرة المسحوبة أولا تحمل الرقم i . أوجد $P(B_i|A)$, $P(A|B_i)$ حيث $i \in \{1,2,3,4\}$ في كل من الحالات الآتية :

١ - السحب مع الإرجاع .

٢ - السحب بدون إرجاع .

١٣ – في استطلاع للرأي للتعرف على أراء الناس حول موضوع ما ، سواء بالموافقة أو عـــدم الموافقة أخذت عينة من مجموعة أشخاص شملت رجال وإناث وكانت نتائج الاســـتطلاع كما موضح بالجدول الآتي :

	موافق	غير موافق	المجموع
رجال	520	80	600
إناث	180	220	400
المجموع	700	300	1000

فإذا تم اختيار شخص من العينة بصورة عشوائية أوجد احتمال ما يأتي :

١– أن يكون رجل إذا علمنا أنـــه غير موافق .

٢– أن يكون موافق إذا علمنا أنها أنثى .

١٤– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين .أوجد احتمال أن يكون مجموع ما يظـــهر على الوجهين أقل من 7 في كل من الحالات الآتية :

١ – إذا ظهر العدد 3 على حجر النرد الثاني .

٢ – إذا ظهر العدد 3 على حجر واحد على الأقل .

٣ – إذا ظهر العدد 3 على حجر واحد على الأكثر .

١٥– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين وجد أن مجموع ما يظهر على الوجهين يقبل القســـمة على 5 . أوجد احتمال ظهور الرقم 5 على كل من حجري النرد في الحالات الآتية :

١ – حجري نرد متميزين .　　　　　　٢ – حجري نرد متماثلين .

١٦– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين إذا علمت أن الرقمين الظاهرين مختلفـــين ، أحســـب احتمال كل مما يأتي :

١–مجموع الرقمين الظاهرين يساوى 7 .

٢–مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 7 .

٣–مجموع الرقمين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

١٧– تصل حافلة إلى محطة ما يومياً في وقت عشوائي بين الساعة 7:00 والساعة 7:20 صباحا . وصل شخص إلى المحطة في الساعة 7:00 صباحا وانتظر الحافلة حتى الساعة 7:10 ولم تصل فما هو احتمال أن تصل الحافلة خلال 5 دقائق أخرى على الأكثر .

١٨– يتحرك قطار من مدينة a إلى مدينة d مرورا بالمدينة b ثم المدينة c . حدث عطل للقطار في مكان ما عشوائي فإذا علمت أن القطار قد شوهد يمر بالمدينة b فما هو احتمال أن يكون العطل قد حدث للقطار بعد مروره بالمدينة c علما بأن المسافة بين المدينتين a , d تساوى 900 كيلومتر وهى ضعف المسافة بين المدينتين a , c وثلاث أمثال المسافة بين المدينتين b , c .

١٩– مزرعة سمكية صغيرة بها 100 سمكة من نوعين A , B بينها 30 من النوع A والباقي من النوع B ، وضعت شبكة صغيرة فاصطادت 10 سمكات . أوجد احتمال أن 3 منها من النوع A إذا علمت انه على الأقل 4 منها من النوع B .

٢٠– سحبت 8 ورقات عشوائياً من أوراق اللعب (الكوتشينة) ، فإذا علمت أن ثلاث ورقات منها على الأقل كانت صور فأوجد احتمال أن الورقات الخمس الأخرى تكون أيضا صور .

٢١– في تجربة سحب كارت بطريقة عشوائيةً من مجموعة تتكون من 50 كارت مرقمة بالصورة 49 , ... , 02 , 01 , 00 نفرض أن مجموع أرقام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب تساوى α وأن حاصل ضرب أرقام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب يساوي β . أوجد

1 - $P(\alpha=7 \mid \beta=0)$.

2 - $P(\alpha=i \mid \beta=0)$, $0\le i\le 13$.

٢٢– في مزرعة ما يوجد 20 رأس من الغنم 4 منها مصابة . لاستبعاد الأغنام المصابة تم اختيار الغنم واحدة بعد الأخرى فإذا وجدنا أن الأغنام الثلاثة الأولى التي تم اختيارها جميعها سليم فما هو احتمال أن الاختيار الرابع يكون أحد الأغنام السليمة .

٢٣- عائلة لديها ثلاثة أطفال ، مع مراعاة الأسبقية في الولادة أوجد :

١- احتمال أن يكون للعائلة بنت واحدة فقط بشرط أن يكون الطفل الأكبر بنت .

٢- احتمال أن يكون للعائلة ولداً واحد على الأقل إذا عُلم أن الطفل الأكبر ولد .

٣- احتمال أن يكون للعائلة ولدان إذا عُلم أن الطفل الأكبر بنتاً .

٤- احتمال أن يكون للعائلة ولد على الأكثر إذا عُلم أن أحد الطفلين ولداً .

٢٤- قام رجل بزيارة عائلة لديها ثلاثة أطفال ، ودخل طفلين إلى الغرفة أحدهما ولد والآخر بنت ، أوجد احتمال أن يكون الطفل المتبقي بنت إذا كان

١ - من المعلوم أن الطفل المتبقي هو اصغر الأطفال .

٢ - ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر .

٢٥- ألقيت عملة معدنية متزنة أربع مرات . أوجد احتمال أن الرمية الرابعة تكون صورة في كل من الحالات الآتية :

١ - الرميات الثلاثة الأولى جميعها صور .

٢ - الرميات الثلاثة الأولى بها صورتان على الأقل .

٢٦- صندوق يحتوي على 20 وحدة من إنتاج ما بها 8 وحدات معيبة ، اختيرت 3 وحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع ، أوجد :

١ - احتمال أن تكون الوحدات الثلاث معيبة .

٢ - احتمال أن تكون الوحدة الأولى والثانية سليمة بينما الثالثة معيبة .

٣ - احتمال أن تكون واحدة على الأكثر معيبة .

٢٧- صندوق يحتوي على 8 وحدات من إنتاج ما بها 2 وحدة معيبة ، وللتعرف على الوحدات المعيبة تم سحب الوحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة بعد الأخرى وبدون إرجاع .

١- أوجد احتمال سحب الوحدتين المعيبتين في أول وثاني سحب .

٢- أوجد احتمال أن تتوقف عملية السحب بعد السحب الرابع .

٢٨- صندوق يحتوي على 20 وحــدة من إنتاج ما بها 8 وحدات معيــبة ، وللتعرف علــى الوحدات المعيبة تم سحبها وفحصها واحدة بعد الأخرى عشوائياً وبـــدون إرجــاع ، أوجد ما يأتي :

١-احتمال أن الوحدات الأربعة الأولى التي تم فحصها جميعها وحدات معيبة .

٢-احتمال أنه في الوحدات الأربعة الأولى التي تم فحصها يوجد على الأقــل وحدتــان معيبتان .

٢٩- صندوقان يحتوى الأول على 50 وحدة من إنتاج ما منها 4 وحدات معيبــة ويحتــوى الصندوق الثاني على 80 وحدة من نفس الإنتاج منها 6 وحدات معيبة . ألقي حجــر نرد متزن مرة واحدة فإذا ظهر وجه يحمل عدد زوجي نختار عشوائياً وحدة من الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً وحدة من الصندوق الثاني . أوجد احتمال أن الوحدة التي تم اختيارها تكون معيبة .

٣٠- صندوقان يحتوى الأول على 40 مصباح كهربائي منها عدد 5 مصابيح معيبة ويحتــوى الصندوق الثاني على 70 مصباح كهربائي منها عدد 4 مصابيح معيبة . ألقي حجــري نرد متزنين فإذا كان مجموع ما يظهر على الوجهين اكبر من 8 نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني . أوجد احتمال أن المصباح الذي تم اختياره يكون مصباح سليم .

٣١- جميع الطلاب في الفرقة الأولى بقسم الرياضيات بكلية التربية جامعة عين شمس يدرسـون مقرر حساب التفاضل والتكامل ومقرر الفيزياء العامة ولقد أوضحت الإحصائيـــات في نهاية العام أن 21 % من الطلاب حصلوا على تقدير جيد جــدا في مقــرر حســاب التفاضل والتكامل وأن 14 % حصلوا على تقدير جيد جدا في كل مــن المقرريــن . اختير طالب عشوائياً من هؤلاء الطلاب ووجد انه حاصل على تقدير جيد جدا في مقــرر حساب التفاضل والتكامل فما هو احتمال أن هذا الطالب يكون قد حصل على تقديــر جيد جدا في مقرر الفيزياء العامة .

٣٢- ثلاث ماكينات تنتــج على الترتيب 25% ، 35% ، 40% من الإنتــاج الكلي لأحد المصانع ، وكانت نســبة إنتاج قطعة تالفــة في الماكينات الثلاث على الــترتيب هي 2% ، 4% ، 3% . إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشــوائياً ، فمــا احتمال أن تكون غير تالفــة ؟

٣٣- أربعة ماكينات تنتــج على الترتيب 15% ، 20% ، 30% ، 35% مــن وحدات الإنتــاج الكلي لأحد المصانع وكانت نســبة إنتــاج وحــدة تالفــــة في الماكينات الأربعة هي 1% ، 5% ، 4% ، 3% علــى الــترتيب . إذا سحبت وحدة من الإنتاج الكلي عشوائياً

١ - أوجد احتمال أن تكون تالفــة .

٢ - أوجد احتمال أن الوحدة المسحوبة كانت من الماكينة الرابعة إذا علمت أنها تالفة .

٣ - أرسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها المطلوب السابق .

٣٤- يتنافس أربعة أشخاص على منصب مدير لأحد الأندية الرياضية ، وكان احتمال الفــوز لهم 30% , 10% , 35% , 25% على الترتيب . وإذا كان احتمال بنــاء صالــة العاب مغطاة إذا فاز الشخص الأول 0.6 وإذا فاز الشــخص الثــاني 0.4 وإذا فــاز الشخص الثالث 0.5 وإذا فاز الشخص الرابع 0.45 .

١ - أوجد احتمال بناء صالة العاب مغطاة في النادي.

٢ - إذا تم بناء صالة العاب مغطاة في النادي فما هو احتمال أن يكون الشخص الثــالث قد فاز بالمنصب ؟

٣٥- تقوم أحد الشركات باستئجار 35 % من السيارات للموظفين من معرض 1 لتأجــير السيارات والباقي من معرض II فإذا كان نسبة 8 % من ســيارات المعــرض I ونسبة 5 % من سيارات المعرض II تتعرض للأعطال خلال فترة التأجير . ركــب أحد الموظفين سيارة من هذه السيارات ، أوجد احتمال حدوث عطل . وإذا علمــت أن الشركة قررت إنهاء التعاقد مع المعرض الذي يحدث عطل في إحدى ســيارته وحــدث بالفعل عطل في أحد السيارات فما هو احتمال أن يتم إنهاء التعاقد مع المعرض II .

٣٦– يتنافس ثلاثة أشخاص في سباق عالمي للسباحة ، وكانت احتمالات الفوز لهم 0.3 للأول و 0.5 للثاني و 0.2 للثالث . وإذا كان احتمال تحطيم الرقم العالمي السابق إذا فاز الشخص الأول هو 0.5 وإذا فاز الشخص الثاني هو 0.6 وإذا فاز الشخص الثالث هو 0.4 .

١ – أوجد احتمال عدم تحطيم الرقم العالمي السابق .

٢ – إذا حدث تحطيم للرقم العالمي السابق فما هو احتمال أن يكون الشخص الأول قد فاز بالسباق ؟

٣ – إذا لم يحدث تحطيم للرقم العالمي السابق فما هو احتمال أن يكون الشخص الثاني قد خسر السباق ؟

٣٧– مصنع للسيارات في سنة ما انتج 5000 سيارة من أربعة ألوان منها 1000 سيارة حمراء ، 1500 سيارة بيضاء ، 1750 سيارة زرقاء ، 750 سيارة خضراء . تم اكتشاف عيب في نظام التبريد في 750 سيارة من هذا الإنتاج منها 100 سيارة حمراء ، 120 سيارة بيضاء ، 280 سيارة زرقاء والباقي من السيارات الخضراء . اخترنا سيارة عشوائياً من هذا الإنتاج لونها ابيض ، ما هو احتمال أن يكون بها عيب في نظام التبريد ؟

٣٨– ثلاثة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة كما بالجدول الآتي :

الكرات	الصندوق I	الصندوق II	الصندوق III
حمراء	3	2	5
بيضاء	5	1	3
سوداء	2	3	1
المحتوى	10	6	9

تم اختيار صندوق عشوائياً وسحبت منه كرة ، أوجد

١ – احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٢ – إذا وجدنا أن الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق II .

٣ – إذا وجدنا أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أنها ليست من الصندوق III .

٣٩- مجموعة أقلام وزعت عشوائياً وبالتساوي على أربعة أشخاص A , B , C , D وبها 24 قلم أزرق ، 4 أقلام حمراء فإذا علمت أن الشخص B لديه قلم أحمر واحد فأوجد
١- احتمال أن الشخص C يكون معه الأقلام الحمراء الثلاثة الباقية .
٢- احتمال أن الشخص A لا يكون معه أياً من الأقلام الحمراء الثلاثة الباقية .
٣- احتمال وجود قلم احمر مع كل من الأشخاص A , C , D .

٤٠- أربعة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة يحتوى الأول على 10 كرات منها 7 بيضاء والباقي حمراء ويحتوى الثاني على 15 كرة منها 9 بيضاء والباقي سوداء ويحتوى الثالث على 16 كرة منها 9 بيضاء ، 5 حمراء والباقي سوداء ويحتوى الرابع على 20 كرة منها 8 بيضاء ، 7 حمراء والباقي سوداء ، اختير صندوق من الصناديق الأربعة عشوائياً وسحبت منه كرة بشكل عشوائي . أوجد احتمال سحب كرة سوداء ، وإذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الرابع .

٤١- ستة صناديق متشابهة تحتوي على مصابيح كهربائية كما بالجدول الآتي :

	الصندوق 1	الصندوق 2	الصندوق 3	الصندوق 4	الصندوق 5	الصندوق 6
مصابيح سليمة	20	25	40	30	15	45
مصابيح معيبة	1	3	4	2	0	5

القي حجر نرد متزن مرة واحدة وتم سحب مصباح عشوائياً من الصندوق الذي يحمل الرقم الظاهر على وجه حجر النرد . أوجد
١- احتمال أن المصباح سليم .
٢- احتمال أن المصباح سحب من الصندوق الرابع إذا عُلم انه مصباح معيب .
٣- احتمال أن المصباح سحب من صندوق يحمل رقم فردى إذا عُلم انه مصباح سليم .
٤- احتمال أن المصباح سحب من صندوق يحمل رقم زوجي إذا عُلم انه مصباح معيب.

٤٢– إذا كانت محتويات صندوقين كما بالجدول

	الصندوق I	الصندوق II
ساعات ذهبية G	3	2
ساعات فضية S	5	3
مجموع الساعات	8	5

اختير أحد الصندوقين عشوائياً وأخذت منه ساعة بطريقة عشوائية ، ارسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت ساعة ذهبية .

٢– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت ساعة فضية .

٣– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت من الصندوق الثاني إذا علم أنها فضية .

٤٣– لدينا ثلاثة صناديق تحوي كرات ملونة موزعة كما بالجدول الموضح ، اخترنا أحد الصناديق بطريقة عشوائية وسحبنا منه كرة عشوائياً .

الكرات	الصندوق A_1	الصندوق A_2	الصندوق A_3
حمراء R	3	2	2
بيضاء W	5	1	3
المحتوى	8	3	5

ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١– احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٢– إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق A_1 .

٤٤-كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى ، أوجد

١ - احتمال ظهور الصورة في المرتين .

٢ - احتمال عدم ظهور الصورة في المرة الثانية .

٤٥- يحتوي وعاء A على x كرة حمراء ، y كرة بيضاء ويحتوي وعاء B على z كرة حمراء ، w كرة بيضاء.

١- إذا اختير وعاء عشوائياً وسحب منه كرة عشوائياً فما احتمال أن تكون حمراء.

٢ - إذا سحبت كرة عشوائياً من الوعاء A ووضعت في الوعاء B ثم سحبت كرة عشوائياً من الوعاء B فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء .

٤٦-صندوق يحتوى على 10 كرات منها 3 كرات حمراء والباقي كرات بيضاء ، سحبت كرة عشوائياً من الصندوق بدون إرجاع وأضيفت كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة وسحبت بعد ذلك كرة ثانية من الصندوق . أرسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١ - احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ - احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣ - احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٤ - احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون .

٤٧-صندوق يحتوى على 22 كرة منها 9 كرات حمراء والباقي كرات بيضاء ، سحبت كرتين عشوائياً على الترتيب واستبعدتا من الصندوق دون النظر إلى ألوانها وبعد ذلك سحبت كرة ثالثة عشوائياً من الصندوق ووجد أنها بيضاء ، ما احتمال أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأحمر ؟

٤٨– صندوق يحتوى على 9 كرات حمراء ، 7 كرات بيضاء ، 6 كرات زرقاء تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع . أرسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ – احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣ – احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٤ – احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون .

٤٩– يحتوي صندوق A على 15 ورقة مرقمة من 1 إلى 15 ويحتوي صندوق B على 8 ورقات مرقمة من 1 إلى 8 ، اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة ، باستخدام شجرة الاحتمال للتجربة أوجد

١ – احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم فردى .

٢ – إذا كان رقم الورقة المسحوبة فردياً فأوجد احتمال أنها سحبت من الصندوق B .

٥٠– صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 10 كرات حمراء ، 12 كرة بيضاء ويحتوى الصندوق الثاني على 20 كرة حمراء ، 9 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشوائية ثم سحبت منه كرة عشوائياً ووضعت في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونها ثم سحبت كرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من اللون الأحمر.

٢ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من نفس اللون.

٣ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني مختلفتا اللون.

٤– احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء .

٥– احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء بشرط أن الكرة في السحب الأول كانت حمراء.

٦ – احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول كانت من الصندوق الثاني .

٥١- صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 10 كرات حمراء ، 12 كرة بيضاء ويحتوى الصندوق الثاني على 20 كرة حمراء ، 9 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشوائية ثم سحبت منه كرتان عشوائياً ووضعتا في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونهما ثم سحبت كرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ - احتمال أن الكرتان في السحب الأول والكرة في السحب الثاني بيضاء .

٢ - احتمال أن الكرتان في السحب الأول والكرة في السحب الثاني من نفس اللون.

٣- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء .

٤- احتمال أن الكرة في السحب الثاني حمراء بشرط أن الكرتان في السحب الأول كانتا مختلفتا اللون .

٥- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرتان في السحب الأول كانتا من الصندوق الأول .

٥٢-يحتوي صندوق A على 5 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ويحتوي صندوق B على كرة حمراء وكرتان بيضاء . ألقي حجر نرد متزن فإذا ظهر عدد يقبل القسمة على 3تسحب كرة من الصندوق A وتوضع في الصندوق B ثم تسحب كرة من الصندوق B وخلاف ذلك تسحب كرة من الصندوق B وتوضع في الصندوق A ثم تسحب كرة من الصندوق A . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ - احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ - احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٥٣- في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة ثلاث مرات نفرض أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى ونفرض أن الحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية ونفرض أن الحدث C هو ظهور صورة في الرمية الثالثة . وضح استقلال الأحداث A , B , C .

٥٤– صندوق يحتوى على 9 كرات حمراء ،5 كرات بيضاء . تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى .نفرض أن الحدث A هو أن تكون الكرة الأولى حمراء ونفرض أن الحدث B هو أن تكون الكرة الثانية بيضاء .

١ – إذا كان السحب مع الإرجاع هل الحدثان A , B مستقلان ؟

٢ – إذا كان السحب بدون إرجاع فهل الحدثان A , B مستقلان ؟

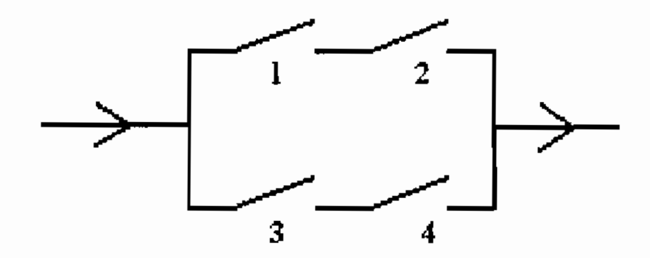
٥٥– إذا كان الحدث A يعنى أن للعائلة أطفال من الذكور والإناث والحدث B يعنى أن للعائلة ولد واحد على الأقل ، والحدث C يعنى أن للعائلة ولد واحد على الأكثر . وضح استقلال الأحداث A , B , C في الحالات الآتية :

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان .

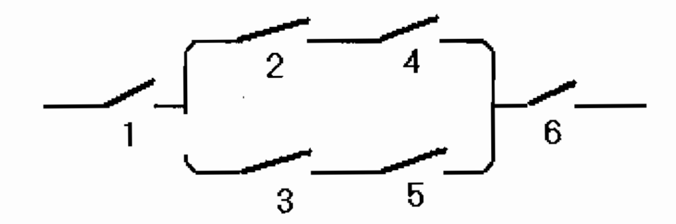
٥٦–في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين ، نفرض الحدث A هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 5 , 2 , 1 ونفرض الحدث B هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 6 , 5 ونفرض الحدث C هو أن مجموع ما يظهر في الرميتين أقل من 9 . وضح استقلال الأحداث A , B , C .

٥٧–الشكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات أربعة مفاتيح مستقلة عن بعضها البعض سواء في الغلق أو الفتح واحتمال الفتح هو p واحتمال الغلق هو p-1



أوجد احتمال عدم مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

٥٨–الشـــكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات ستة مفاتيح مستقلة عن بعضـــها البعـــض سواء في الغلق أو الفتح واحتـــمال الغلق هو p واحتـــمال الفتح هو p-1



أوجد احتمال مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

٥٩– في تجربة اختيار عددا عشوائياً من مجموعة الأعداد $\{ 1, 2, 3, \ldots, 1000 \}$ نفرض أن الحدث A هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث B هو اختيار عـدد يقبل القسمة على 4 و الحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 .

١– هل مجموعة الأحداث A, B, C مستقلة مثنى مثنى ؟

٢– هل مجموعة الأحداث A, B, C مستقلة ؟

٦٠– إذا كان $P(A) = 0.4$ ، $P(C|A) = 0.5$, $P(A|C) = 0.4$

١ – هل A, C مســـتقلان ؟

٢ – مـــا هو احتمال C ؟

٣ – أوجد $P(A \cup C)$.

٦١– يصل شخص إلى مكتبه كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثامنة 8:00 والســـاعة التاسعة 9:00 صباحا . نفرض أن الحدث A هو أن يصل هذا الشخص إلى مكتبه غدا بعد الثامنة بعشرة دقائق على الأكثر ونفرض أن الحدث B هو أن يصل الشـــخص إلى مكتبه غدا قبل الساعة 8:30 ونفرض أن الحدث C هو أن يصل الشخص إلى مكتبـــه إما بين الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 صباحـــا . هل مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى أم مستقلة ؟

٦٢–أحد فرق كرة القدم في أي مباراة يلعبها يكون احتمال فوزه 0.7 واحتمال تعادله 0.2 واحتمال خسارته 0.1 فإذا لعب هذا الفريق أربع مباريات فأوجد ما يأتي :

١– احتمال فوز الفريق في المباريات الأربعة .

٢– احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل .

٣– احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل وعدم هزيمته .

٤– احتمال عدم فوز الفريق في أي مباراة .

٥– إذا كان الفريق يحصل على ثلاث نقاط في حالة الفوز ونقطة واحدة في حالة التعادل ولا يحصل على أي نقطة في حالة الخسارة فأوجد احتمال أن الفريق يحصل على 9 نقاط على الأقل في مجموع المباريات الأربعة .

٦٣–امتحان في مقرر اللغة الإنجليزية به 20 سؤال ، العشرة أسئلة الأولى بنظام الصواب والخطأ true - false والأسئلة الباقية بنظام الاختيار من متعدد multiple choice حيث لكل سؤال ثلاث إجابات منها إجابة واحدة فقط صواب . أحد الطلاب لم يكن مستعد للاختبار وأجاب على جميع الأسئلة بالتخمين . أوجد

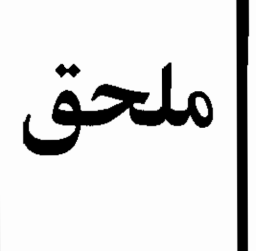
١– احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة .

٢– احتمال أن تكون الإجابة خطأ على جميع الأسئلة .

٣– احتمال أن تكون الإجابة صواب على الأسئلة الزوجية وخطأ على الأسئلة الفردية .

٤– إذا كان النجاح في الاختبار يتطلب أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل من الأسئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد فأوجد احتمال رسوب هذا الطالب .

٦٤–في أحد الأيام قام مندوب مبيعات لأحد شركات الأدوية بالمرور على 16 صيدلية لعرض أنواع أدوية من إنتاج الشركة فإذا كان احتمال أن يتعاقد على توزيع الأدوية لكل من الصيدليات يساوى 0.1 فما هو احتمال أن يتعاقد على توزيع الأدوية مع صيدلية واحدة على الأقل في هذا اليوم .



المجموعات Sets

١ - مقدمة Introduction

مفهوم المجموعة يستخدم كثيراً في الرياضيات فالطلاب يدرسون نظرية المجموعات بشكل أو بآخر في جميع المستويات في الرياضيات بدءاً من المدرسة الابتدائية وصولاً إلى الجامعة حتى أنه يمكننا القول بأن نظرية المجموعات تمثل فكرة موحدة تربط كل فروع الرياضيات بل واكثر من ذلك فهي تعتبر وسيلة ناجحة جدا لتوحيد لغة الرياضيات . وفى المفهوم الرياضي فإن كلمة مجموعة Set تطلق فقط على التجمعات من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفا جيداً وهذه الأشياء تسمى عناصر المجموعة elements وهى محددة تحديداً دقيقاً لا يقبل الغموض بمعنى أنه لأي عنصر فإننا نستطيع الحكم على ما إذا كان العنصر موجود ضمن عناصر المجموعة أم غير موجود ، ومن أمثلة المجموعات :

- مجموعة كتب الرياضيات فى مكتبة كلية التربية بجامعة عين شمس .
- مجموعة أسماء الطلاب بالفصل .
- مجموعة شهور السنة الميلادية .

بينما " أسماء الطلاب طوال القامة بالفصل " لا تمثل مجموعة لأنها غير معرفة تعريفا جيدا ، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف الكبيرة ... ,A, B,C بينما يرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة ... , a , b , c وإذا كان العنصر a ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب $a \in A$ حيث الرمز $\in$ يمثل الانتماء أما إذا كان العنصر a ليس من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب $a \notin A$ حيث الرمز $\notin$ يمثل عدم الانتماء . ويمكن وصف المجموعة بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع { } على أن توضع فواصل بين العناصر ، وترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أهمية وكذلك تكرار عنصر في المجموعة لا يغير من المجموعة لان

العبرة بالعناصر المختلفة داخل المجموعة وتسمى هذه الطريقة لوصف المجموعة بطريقة السرد أو القائمة فمثلا المجموعة $\{a,e,i,o,u\}$ هي نفسها المجموعة $\{a,e,a,o,u,i,o,u\}$ وإذا كانت المجموعة تحتوى على عناصر كثيرة فإننا نستخدم ثلاث نقاط ، ... ، لوصف أن المجموعة تحتوى على عناصر أخرى ومن السهل على القارئ تقديرها ومعرفتها بسهولة فمثلا إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد 1 إلى العدد 100 فإنه يمكن كتابة A بالصورة $A=\{1,2,3,\ ...\ ,100\}$ ولأي مجموعة S فإن عدد عناصرها يرمز له بالرمز $n(S)$ وعندما يكون $n(S)<\infty$ فإن المجموعة S تسمى مجموعة منتهية Finite Set وخلاف ذلك فإن المجموعة S تسمى مجموعة غير منتهية Infinite Set فمثلا المجموعة $A=\{1,2,3,\ ...\ ,100\}$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها $n(A) = 100$ بينما المجموعة $B=\{2,4,6,\ ...\ \}$ مجموعة غير منتهية ويرمز لذلك $n(B) = \infty$. وإذا كانت المجموعة لا تحتوى على أي عنصر فإنها تسمى بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز Φ أو بالرمز { } فمثلا إذا كانت S هي مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من 5 واصغر من 3 فإن S تكون هي المجموعة الخالية . وتوجد طريقة ثانية لوصف المجموعات تسمى بطريقة الصفة المميزة حيث يتم كتابة أحد عناصر المجموعة مع ذكر الصفة المميزة للمجموعة ويعبر عنها بالصورة $\{x \mid p(x)\}$ وتقرأ مجموعة العناصر x التي تحقق الخاصية $p(x)$ والمتغير x يمثل عنصر اختياري من عناصر المجموعة والخط الرأسي " | " يعني حيث أن فمثلا

- مجموعة شهور السنة الميلادية يعبر عنها بالصورة { x | x اسم شهر في السنة الميلادية }
- مجموعة الأعداد الزوجية يعبر عنها بالصورة { x | x عدد زوجي }
- مجموعة حل المعادلة $x^2-9=0$ يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x^2 - 9 = 0\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 10 يعبر عنها بالصورة

{ x | x عدد صحيح موجب أقل من عشرة }

وإذا كانت A , B مجموعتان غير خاليتان فإن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B يكون مجموعة يرمز لها A x B وتعرف بالصورة

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

فمثلا إذا كانت $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$ فإن $AxB=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

٣ - المجموعات الجزئية Subsets

إذا كانت A , B مجموعتان بحيث أن كل عنصر في المجموعة A موجود أيضاً في المجموعة B ، أي إن المجموعة A محتواه بالكامل في المجموعة B ، في هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subseteq B$ أو $B \supseteq A$.
وإذا كانت $A \subseteq B$ ولكن يوجد عنصر واحد على الأقل في المجموعة B وغير موجود في المجموعة A في هذه الحالة يقال أن A مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subset B$ أو $B \supset A$. وحيث إن المجموعة الخالية Φ لا تحتوى على أي عنصر إذن لا يمكن إيجاد عنصر في المجموعة الخالية Φ وغير موجود في أي مجموعة A وبالتالي فإن المجموعة الخالية Φ تكون مجموعة جزئية من أي مجموعة A ($\Phi \subseteq A$) كما أن أي مجموعة تكون مجموعة جزئية من نفسها ($A \subseteq A$) .
وبفرض المجموعة $A=\{a,b\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A تكون $\Phi , A , \{a\} , \{b\}$ وعددها يساوى 2^2 وبالمثل للمجموعة $B = \{a , b , c\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة B تكون $\Phi, B, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ وعددها يساوى 2^3 وبوجه عام إذا كانت المجموعة A تحتوى على n من العناصر ($n(A) = n$) فإن عدد المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A يساوى 2^n . ومجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A تسمى مجموعة القوة Power Set للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $\rho(A)$.
مثال ١ : نفرض المجموعتان $A=\{a,b\} , B=\{a,b,c\}$ إذن $p(A) = \{\Phi, A, \{a\}, \{b\}\}$
ومجموعة القوة للمجموعة B $p(B) = \{\Phi, B, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$
ويقال أن المجموعتين A , B متساويتين ويرمز لذلك $A = B$ إذا وفقط إذا احتويتا على نفس العناصر بمعنى أن كل عنصر في المجموعة A موجود في المجموعة B ($A \subseteq B$) وكل عنصر في المجموعة B موجود في المجموعة A ($B \subseteq A$) . وفى أي مناقشة خاصة بالمجموعات فإنه يتحتم علينا تعيين مجموعة ثابتة بحيث أن جميع المجموعات التي نتعامل معها في المناقشة تكون مجموعات جزئية منها وفى هذه الحالة نسمى تلك المجموعة الثابتة بالمجموعة الشاملة Universal Set ويرمز لها بالرمز U وبالتالي فإنه لأي مجموعة A فإن $\Phi \subseteq A \subseteq U$.

٣ - العمليات على المجموعات Set Operations

إذا كانت A , B مجموعتان فإن تقاطعهما هو مجموعة جميع العناصر المشتركة التي تنتمي إلى كل من A , B معاً ويرمز لذلك $A \cap B$ أي إن

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

واتحادهما هو المجموعة التي تحتوى على جميع العناصر الموجودة في A أو الموجودة في B أو كليهما ويرمز لذلك $A \cup B$ أي إن

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

حيث الرمز $\wedge$ هو أداة الوصل " and " و الرمز $\vee$ هو أداة الفصل " أو or " وهى من أدوات الربط في لغة المنطق ، وبوجه عام إذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ مجموعات فإن تقاطعها يعرف بالصورة

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \forall \quad 1 \le i \le n , \quad x \in A_i \}$$

واتحادها يعرف بالصورة

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \exists \quad 1 \le i \le n : \quad x \in A_i \}$$

ويقال للمجموعتين A , B إنهما منفصلتين إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \Phi$ ومكملة المجموعة A في المجموعة الشاملة U يرمز لها A' وتعرف بأنها مجموعة كل العناصر الموجودة في U والغير موجودة في المجموعة A أي إن

$$A' = \{ x \mid x \in U \wedge x \notin A \}$$

ونلاحظ أن مكملة U تكون المجموعة الخالية Φ ($U' = \Phi$) ومكملة Φ تكون المجموعة الشاملة U ($\Phi' = U$) ولأي مجموعة A فإن $A'' = A$. والفرق بين المجموعتان A , B يرمز له $A - B$ ويعرف كالآتي :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap B'$$

والفرق المتماثل بين المجموعتان A , B يرمز له $A \Delta B$ (ويقرأ A دلتا B) ويعرف كالآتي

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال ٢ :

نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a , b , c , d , e , f , g , h \}$ ونفرض المجموعات

$A = \{ a , c , d , h \}$, $B = \{ b , c , d \} , C = \{ b , d , f , h \}$

في الجدول الآتي نضع بعض العمليات على المجموعات A , B , C

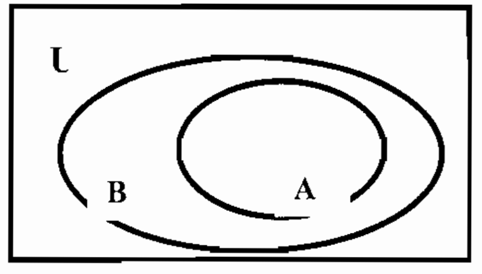
$A \cap B = \{ c , d \}$
$A \cap C = \{ d , h \}$
$B \cap C = \{ b , d \}$
$A \cup B = \{ a , b , c , d , h \}$
$A \cup C = \{ a , b , c , d , f , h \}$
$B \cup C = \{ b , c , d , f , h \}$
$A - B = \{ a , h \}$
$B - A = \{ b \}$
$B - C = \{ c \}$
$A \Delta B = \{ a , b , h \}$
$A' = \{ b , e , f , g \}$
$A'' = \{ b , e , f , g \}' = A$
$B' = \{ a , e , f , g , h \}$
$A' \cup B' = \{ a , b , e , f , g , h \}$
$(A \cap B)' = \{ a , b , e , f , g , h \} = A' \cup B'$
$A' \cap B' = \{ e , f , g \}$
$(A \cup B)' = \{ e , f , g \} = A' \cap B'$
$A \cap B \cap C = \{ d \}$
$A \cup B \cup C = \{ a , b , c , d , h , f \}$
$(A \cap B \cap C)' = \{ a , b , c , e , f , g , h \}$
$(A \cup B \cup C)' = \{ e , g \}$
$A - (B \cup C) = \{ a \}$
$(A \cup B) - C = \{ a , c \}$
$A \cap (B - C) = \{ a , d , h \}$

٤- أشكال فن Venn Diagrams

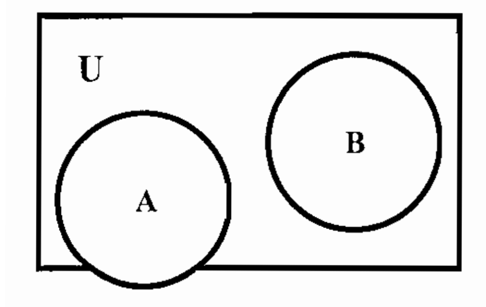
جون فن عالم رياضى إنجليزي (١٨٣٤ – ١٩٢٣) . وهو أول من استخدم الأشكال لتمثيل المجموعات . وأشكال فن ما هي إلا وسيلة تعليمية بسيطة لتوضيح العلاقة بين المجموعات ، وهى تساهم في تصور وأدراك وحل الكثير من الصعوبات المتعلقة بالمنطق ونظرية المجموعات ، وفى أشكال فن كثيرا ما نستخدم الشكل المستطيل ليمثل المجموعة الشاملة U بينما توضع المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضاوية أو دائرية داخل هذا المستطيل . وفى الأمثلة الآتية نبين كيفية استخدام أشكال فن في توضيح العلاقة بين المجموعات .

مثال ٣:

العلاقات $A \cap B = \Phi$, $A \subset B$ موضحة للمجموعتين A , B في أشكال فن الآتية:

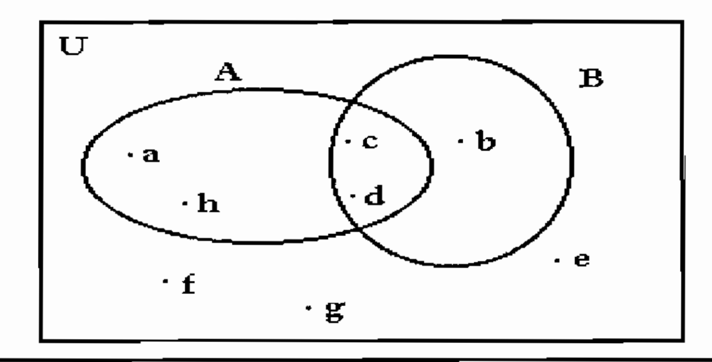


شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ أن المجموعة A واقعة داخل المجموعة B

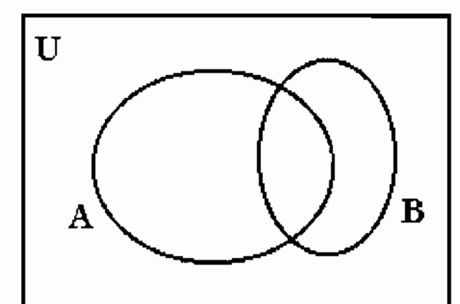


شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث نلاحظ أن المجموعتين A , B منفصلتين .

مثال ٤ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a ,b, c ,d ,e ,f ,g ,h \}$ ونفرض المجموعتان $A=\{a,c,d,h \},B=\{ b,c,d \}$. العلاقة بين المجموعات U,A,B موضحة بشكل فن الآتي :

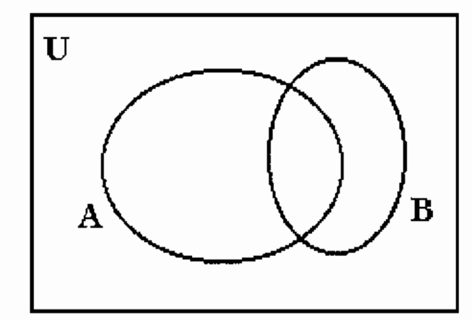


نفرض المجموعتان الغير خاليتان A , B من مجموعة شاملة U .العمليـــــات على المجموعات (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق – الفرق المتماثل) موضحة في أشكال فن الآتية :

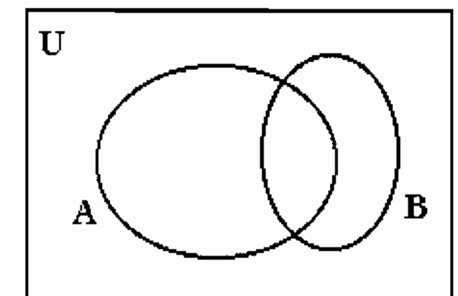




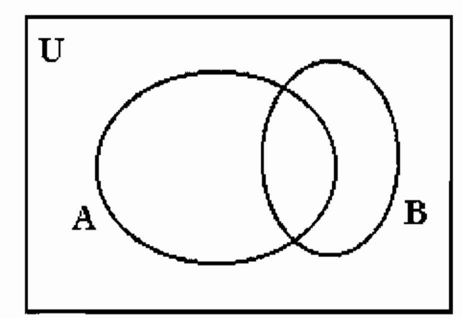
الجزء المظلل يمثل $A \cup B$



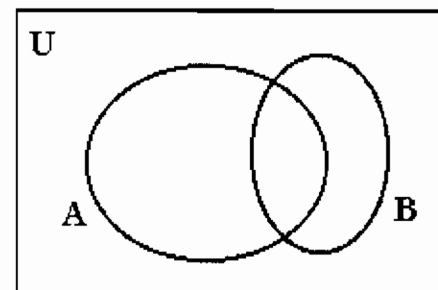
الجزء المظلل يمثل $A \cap B$



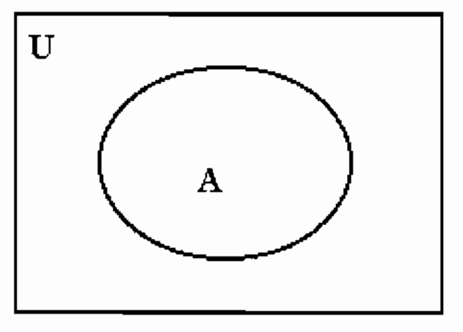
الجزء المظلل يمثل $B - A = B \cap A'$



الجزء المظلل يمثل $A - B = A \cap B'$

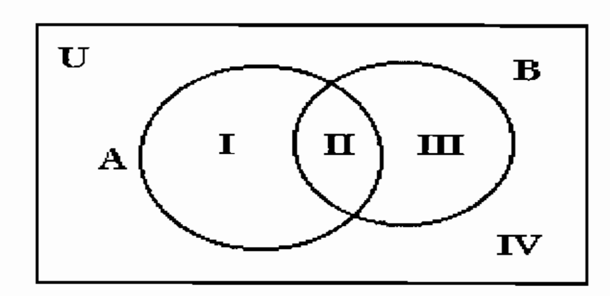


الجزء المظلل يمثل $A \ \Delta \ B$



الجزء المظلل يمثل A'

وعند التعامل مع مجموعتين A , B من مجموعة شاملة U ، ولكي نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتي :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل ، فمثلا

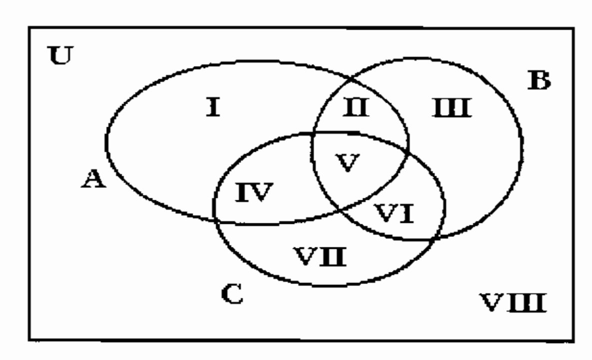
$A \cap B$ يمثلها المنطقة II

$A \cup B$ يمثلها المناطق I , II , III

$A - B$ يمثلها المنطقة I

$(A \cup B)'$ يمثلها المنطقة IV

وعند التعامل مع ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U ولكي نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينها فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتي :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل ، فمثلا

$A \cap B \cap C$ يمثلها المنطقة V

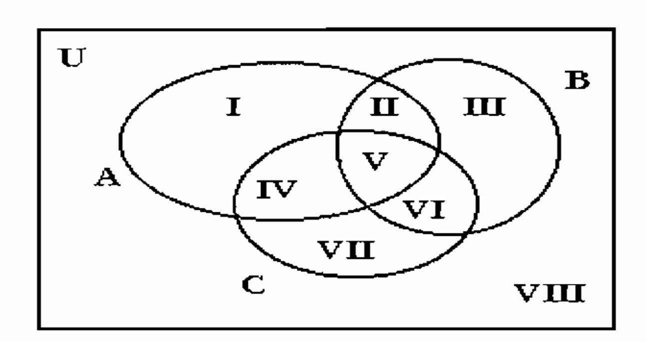
$A \cup (B \cap C)$ يمثلها المناطق I , II , IV , V , VI

$(A \cup B) \cap C$ يمثلها المناطق IV , V , VI

$(A \cup B)'$ يمثلها المناطق VII , VIII

مثال ٥ : نفرض ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U . استخدم أشكال فن في توضيح المجموعة $(A \cap B) \cup (C - A)$.

الحـــل : في شكل فن نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثلها المناطق V, II



ثم نقوم بتظليل $C - A$ ويمثلها المناطق VI , VII وبالتالي فـــإن $(A \cap B) \cup (C - A)$ يمثلها المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل .

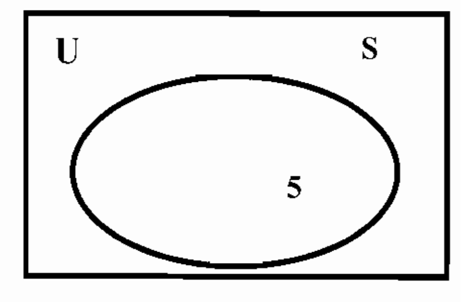
وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين المجموعات وإنما يمكن اســـتخدامها في التعرف على عدد العناصر في المجموعات المختلفة فإذا كانت المجموعة S تحتوى على n من العناصر المختلفة أي إن $n(S) = n$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن بطريقتين:

الطريقة الأولى: يتم فيها كتابة العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S وهذه الطريقة تكون صعبة في حالة إذا كانت المجموعة S تحتوى على عدد كبير من العناصر.

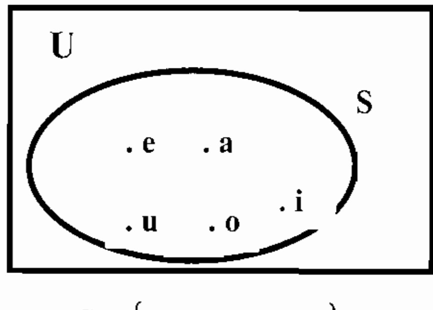
الطريقة الثانية: يتم فيها كتابة العدد الممثل لعدد العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S.

مثال ٦ :

للمجموعة $S = \{a , e , i , o , u\}$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن كالآتي :

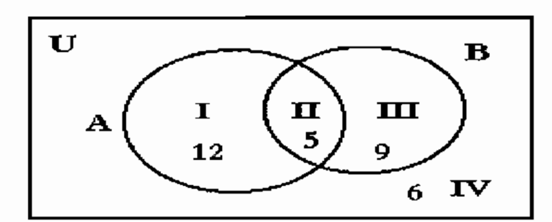


$n(S) = 5$



$S = \{a , e , i , o , u\}$

مثال ٧ : في شكل فن الآتي



الأعداد 6 , 9 , 5 , 12 تمثل أعداد العناصر في المناطق IV , III , II , I على الترتيب

ومن الشكل يمكن استنتاج كل مما يأتي :

$n(A) = 12 + 5 = 17$, $n(A') = 9 + 6 = 15$

$n(B) = 5 + 9 = 14$, $n(A \cup B) = 12 + 5 + 9 = 26$

$n(A \cap B) = 5$, $n(A \Delta B) = 12 + 9 = 21$

نظرية ١ : إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وكنتيجة لهذه النظرية فإنه إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين ومنفصلتين فإن $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ وكذلك إذا كانت A , B , C ثلاث مجموعات منتهية فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

وأشكال فن يمكن استخدامها فى حل المسائل التى تحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات كما نوضح فى الأمثلة الآتية :

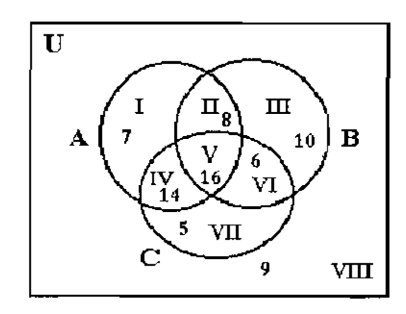
مثال ٨ : في مجموعة معينة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغة الإنجليزية ، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرسون اللغة الإنجليزية فقط . أوجد ما يأتي :

(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات .

(٢) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء .

(٣) – عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث .

الحل : هذه المثال يحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات لذلك يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن . ونلاحظ بالمثال انه يوجد ثلاث مقررات دراسية وبالتالي يكون لدينا ثلاث دوائر في شكل فن ، نفرض المجموعة A تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الرياضيات ، المجموعة B تمثل مجموعة الطلاب الدارسين للفيزياء والمجموعة C تمثل مجموعة الطلاب الدارسين اللغة الإنجليزية .ومن المفضل أن نبدأ مع البيانات الأكثر وضوحا والتي يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذي ننطلق منه لإكمال باقي البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هي الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقاطع المجموعات الثلاث $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 في المنطقة V . وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $A \cap B$ في المنطقتين V, II وعددهم 24 وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل إذن يتبقى 8 طلاب وبالتالي نضع العدد 8 في المنطقة II وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $A \cap C$ في المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل إذن نضع العدد 14 في المنطقة IV وبالمثل نضع العدد 6 في المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فانهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب في المنطقة III التي تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب في المنطقة VII التي تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط ، ومجموع الأعداد الموجودة في شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب في المجموعة يساوى 75 إذن يتبقى 9 طلاب في المنطقة VIII وبالتالي نحصل على شكل فن الموضح . والآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها وذلك بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح . إذن



(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات =

$45 = 7 + 8 + 14 + 16$

(٢) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء = $26 = 7+14 + 5$

(٣) – عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث = 9 .

مثال ٩ :

في مجموعة معينة تتكون من 120 طالب بكلية التربية وجد أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 42 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 20 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 25 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية ، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . أوجد عدد الطلاب الذين يدرسون اللغات الثلاث ووضح عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن .

الحل : نفرض A , B , C ترمز إلى مجموعات الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . وحيث أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الثلاث إذن

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

وبالتعويض فى القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

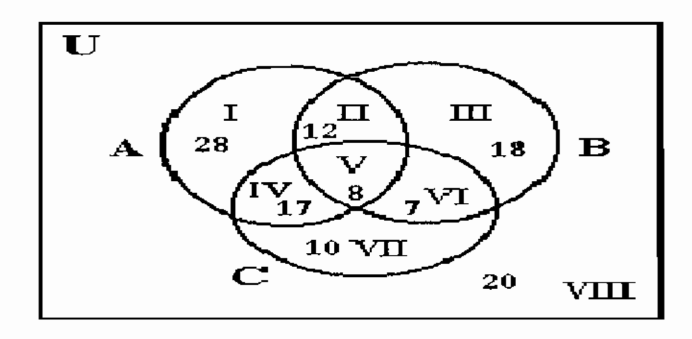
إذن

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالي

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

أي أن 8 طلاب يدرسون اللغات الثلاث . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنا بالمثال السابق ، وبالتالي عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضح بالشكل الآتي :



٥ - جداول الانتماء Membership Tables

يمكن تعريف جداول الانتماء بطريقة مماثلة للطريقة التي يعرف بها جداول الحقيقة في المنطق فإذا كانت $A \neq \Phi$ وكان x عنصرا ما فإنه إما أن يكون $x \in A$ أو $x \notin A$

وإذا كان A , B مجموعتين غير خاليتين وكلن x عنصرا ما فإن الجدول الآتي يصف الاحتمالات الممكنة لانتماء العنصر x أو عدم انتمائه في المجموعتين A , B وجداول الانتماء للعمليات على المجموعات موضحة كالآتي :

A	B
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

A	A′
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

جدول الانتماء للمكملة A′

A	B	A ∪ B
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للاتحاد A ∪ B

A	B	A ∩ B
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للتقاطع A ∩ B

A	B	A Δ B
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للفرق المتماثل A Δ B

A	B	A − B	B − A
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للفرق A − B ، B − A

ونلاحظ من جدول الانتماء للاتحاد $A \cup B$ أن

$$x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$$

كما نلاحظ من جدول الانتماء للتقاطع $A \cap B$ أن

$$x \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \vee \quad x \notin B$$

ولإثبات أن $A \subseteq B$ نفرض $x \in A$ ونحاول إثبات أن $x \in B$. وتعتبر جـداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جدا لبرهنة الكثير من الخواص والنظريات المتعلقة بالمجموعات .

مثال ١٠ :

باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $A - B = A \cap B'$

الحل :

بتكوين جدول الانتماء

A	B	B'	$A - B$	$A \cap B'$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

↑ ↑

العمودين الرابع والخامس منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالي يتحقق أن $A - B = A \cap B'$

مثال ١١ :

باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

الحل :

بتكوين جدول الانتماء

A	B	$A \cap B$	A'	B'	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

العمودين السادس والسابع منطبقان وبالتالي يتحقق أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

٦ - جبر المجموعات Algebra of Sets

نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . في الجدول الآتي نعرض قائمة من القوانين تسمى جبر المجموعات ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الانتماء .

اسم القانون	جبر المجموعات
قوانين اللانمو Idem potent Laws	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قوانين الإبدال Commutative Laws	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانين الدمج Associative Laws	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
قوانين التوزيع Distributive Laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانين الوحدة Identity Laws	$A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap U = A$ $A \cup U = U \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$
قوانين المكملة Complement Laws	$A \cup A' = U \quad , \quad A \cap A' = \Phi$ $U' = \Phi \quad , \quad \Phi' = U \quad , \quad A'' = A$
قوانين ديمورجان De Morgan's Laws	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ونلاحظ من الجدول أن هناك تشابه كبير بين قوانين جبر المجموعات وقوانين جبر التقارير في المنطق الرياضي ، ويأتي هذا التشابه من التناظر بين العمليات الأساسية في جبر المجموعات (الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ والمكملة) وأدوات الربط المنطقية في جبر التقارير (الوصل $\vee$ والفصل $\wedge$ والنفي $\sim$) . ونلاحظ في الجدول أن القوانين مرتبة في صورة ثنائيات (أزواج) وهذا الترتيب يعتمد على مبدأ هام في جبر المجموعات يسمى مبدأ الثنائية (الترافق) وينص على أن صحة متطابقة ما في جبر المجموعات تقتضي صحة متطابقة أخرى تسمى بالمتطابقة الثنائية (المرافقة) ونحصل عليها من إحلال ظهور $\cap, \cup, \Phi, U$ محل $\cup, \cap, U, \Phi$ على الترتيب . ونلاحظ في أزواج القوانين بالجدول أن كل قانون مرافق للآخر .

مثال ١٢ : باستخدام التعاريف اثبت صحة قانون ديمورجان $(A \cup B)' = A' \cap B'$

الحل : من شرط تساوى مجموعتان نحاول إثبات

$1-(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ $\qquad$ $2-\ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

ولإثبات (1) نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \ \wedge \ x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ولإثبات (2) نفرض أن $x \in A' \cap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Rightarrow x \in A' \ \wedge \ x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

ويمكن إثبات ما سبق باستخدام التضمين $\Leftrightarrow$ كالآتي : نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A' \ \wedge \ x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ووفقا لمبدأ الثنائية فإن القانون المرافق $(A \cap B)' = A' \cup B'$ يكون متحقق أيضا .

مثال ١٣ : باستخدام قوانين جبر المجموعات اثبت صحة

$$A-(B \cup C) = (A-B)-C$$

الحل : من تعريف الفرق $\quad A-(B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$

قانون ديمورجان $\quad = A \cap (B' \cap C')$

قانون الدمج $\quad = (A \cap B') \cap C'$

من تعريف الفرق $\quad = (A-B)-C$

مثال ١٤ :

في الجدول الآتي نضع بعض المتطابقات في جبر المجموعات ونوضح المتطابقة المرافقة لكل منها .

المتطابقة	المتطابقة المرافقة
$A \cap A' = \Phi$	$A \cup A' = U$
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \Phi$
$A \cap (B \cup A) = A$	$A \cup (B \cap A) = A$
$A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap C'$	$A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$
$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$	$(\Phi \cup A) \cap (B \cup A) = A$
$(U \cup A) \cup (A \cap \Phi) = U$	$(\Phi \cap A) \cap (A \cup U) = \Phi$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ملحق

تمارين

١ – إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$

(أ) – اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة A .

(ب) – اكتب جميع المجموعات الجزئية B بحيث يكون $\{b\} \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ ، $B \neq A$.

(ج) – اكتب جميع المجموعات الجزئية C بحيث يكون $n(C) \leq 2$.

(د) – فى الجدول الآتى وضح أى من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ ؟ ولماذا ؟

$\Phi \subseteq \{a\}$	$n(\{a\}) = n(\{b\})$	$a \in A$
$\Phi \in A$	$\{\{a, b\}\} \in p(A)$	$\{a, b\} \in A$
$\Phi \in p(A)$	$\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$	$\{a, d\} \subseteq \{b, d, c\}$
$\Phi \subseteq p(A)$	$\{c\} \subseteq \{\{a\}, \{c\}\}$	$\{a, b\} \subseteq p(A)$
$\Phi \in p(\Phi)$	$\{d\} \in \{\{d, c\}, \{c\}\}$	$\{a, c\} = \{c, a, c\}$

٢ – اكتب كل من المجموعات الآتية باستخدام الصفة المميزة

(1)- $A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$

(2)- $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

(3)- $C = \{1, 3, 5, \ldots\}$

(4)- $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$

٣ – إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ فأوجد كل من

$A x B$, $B x A$, $A x A$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A - B)$, $p(A x B)$

٤ – إذا كانت $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ فأوجد $n(X)$ في كل من

(1)- $X = \{x \mid (x \in A) \wedge (2x > 17)\}$

(2)- $X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x^2 \geq x!)\}$

٥ – إذا كانت $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,6,12\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$ مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3, \ldots, 12\}$ فأستخدم أشكال فن في إيجاد كل مما يأتي:

$A \cup B$, $A \cup (B \cap C)$, $A - (B \cup C)$, $B - C'$

$(A \cap B)'$, $A \cap (B' - C)$, $A' \cap (B \cup C)'$, $(A' \cup C')'$

٦ – نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . أستخدم أشكال فن في وصف كل من المجموعات الآتية :

$$A \cup B' \quad , \quad A \cap (B \cup C) \quad , \quad A \cap (B \Delta C) \quad , \quad B \cap C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A - (B \cap C) \quad , \quad A' \cap (B \Delta C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٧ – نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . رتب المجموعات الآتية بحيث تكون كل واحدة منها محتواة في المجموعة التي تليها :

$$A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B \cup C \quad , \quad A \cap B \cap C \quad , \quad \Phi' \quad , \quad A$$

٨ – وضح كل من القوانين الآتية باستخدام أشكال فن ثم أثبت كل منها باستخدام جداول الانتماء وكذلك أثبت كل منها باستخدام التعاريف :

1 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3 - $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

4 - $A \cap (B \cup A) = A$

5 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6 - $A \Delta B = B \Delta A$

7 - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

٩ – باستخدام جبر المجموعات أثبت كل مما يأتي :

1 - $(A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$

2 - $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

١٠ – في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يمارسونها ، فإذا كان 62 طالب يمارسون كرة القدم ، 53 يمارسون كرة السلة ، 65 يمارسون العاب القوى ، 19 يمارسون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يمارسون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يمارسون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يمارسون أيا من الألعاب الثلاث . استخدم أشكال فن في إيجاد عدد الطلاب الذين يمارسون لعبة واحدة فقط .

المراجع

1- Harold J. Larson : Introduction to Probability Theory and Statistical Inference , Third Edition , John Wiley & Sons , 1982 .

2- Lipschurtz , Seymour : Set Theory and Related Topics , Schaum's Outline Series . McGraw – Hill , New York , 1964 .

3- Rohatgi , V.K . : An Introduction to Probability and Mathematical Statistics , John Wiley & Sons , 1976 .

4- Saeed Ghahramani : Fundamentals of Probability , Prentice Hall , 1996 .

5- Sqymour Lipschutz : Probability , Schaum's Outline Series , McGraw – Hill , New York , 1974 .

6- Stupecki , J . : Elements of Mathematical Logic and Set Theory Oxford 1967 .

7- William M . Setek, Jr. : Fundamentals of Mathematics , Prentice Hall , 1996 .

رقم الإيداع : ٢٠٠٢/١٨٩٠٧
ISBN : 977-281-216-9

مطابع الدار الهندسية/القاهرة
تليفون/فاكس : (٢٠٢) ٥٤٠٢٥٩٨